



МОСКОВСКАЯ
МЕДИЦИНА. ОБРАЗОВАНИЕ
ВРАЧАМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. КУРС ЛЕКЦИЙ

А. В. Бородин

МОСКВА
2026

Государственное бюджетное учреждение города Москвы
«Научно-исследовательский институт организации
здравоохранения и медицинского менеджмента
Департамента здравоохранения города Москвы»

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ
МЕТОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
КУРС ЛЕКЦИЙ**

Учебно-методическое пособие

А. В. Бородин

Москва
2026

УДК 005;330.4;338
ББК 65.291.21

Рецензенты:

Петрова Галина Дмитриевна, доктор философских наук, ведущий научный сотрудник
отдела научных исследований, заведующий кафедрой экономики и менеджмента
ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ»;

Полозков Михаил Геннадьевич, доктор экономических наук, профессор, профессор
кафедры экономики и финансов общественного сектора ИГСУ РАНХиГС.

Бородин, А.В.

Основы математических и инструментальных методов экономического анализа. Курс лекций: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / А.В. Бородин. – Электрон. текстовые дан. – М.: ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ», 2026. – URL: <https://niiioz.ru/moskovskaya-meditsina/izdaniya-nii/metodicheskie-posobiya/> – Загл. с экрана. – 80 с.

ISBN 978-5-908096-40-9

Учебно-методическое пособие содержит материалы о методологических положениях анализа экономических процессов и систем на основании использования экономико-математических методов и инструментальных средств. На предлагаемом курсе осваиваются важнейшие приемы экономического анализа и формируются навыки выбора экономико-математических и инструментальных методов для применения их в практике управленческой деятельности, понимания сущности используемых экономических показателей.

Предназначено для аспирантов, обучающихся на менеджеров и организаторов здравоохранения. Может использоваться для подготовки кадров высшей квалификации. Печатается по решению Учебно-методического совета государственного бюджетного учреждения города Москвы «Научно-исследовательский институт организации здравоохранения и медицинского менеджмента Департамента здравоохранения города Москвы».

УДК 005;330.4;338
ББК 65.291.21

*Утверждено и рекомендовано к печати
Научно-методическим советом ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ»
(Протокол № 6 от 16 июня 2026 г.).*

Самостоятельное электронное издание сетевого распространения.

*Минимальные системные требования: браузер Internet Explorer/Safari и др.;
скорость подключения к Сети 1 МБ/с и выше.*

ISBN 978-5-908096-40-9



© Бородин А. В., 2026
© ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ», 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Содержание предмета «Основы математических и инструментальных методов экономического анализа». Теоретико-методологические основы. Основные понятия и метод	4
Лекция 2. Макромодели экономической динамики	16
Лекция 3. Модели и математические методы анализа микроэкономических процессов	29
Лекция 4. Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики.....	40
Лекция 5. Математические методы и модели анализа и прогнозирования развития социально-экономических процессов. Теория, методология и практика компьютерного эксперимента в социально-экономических исследованиях и задачах управления	48
Лекция 6. Системы поддержки принятия решений для рационализации организационных структур и оптимизации управления экономикой на всех уровнях.....	59
Вопросы для самопроверки	68
Список рекомендованной для самостоятельного изучения литературы	70

Лекция 1. Содержание предмета «Основы математических и инструментальных методов экономического анализа». Теоретико-методологические основы. Основные понятия и методы

Основные понятия и методы. Экономико-математическое моделирование: виды моделей: макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические, детерминированные и стохастические. Математический аппарат анализа экономических систем. Теория и методология экономико-математического моделирования, исследование его возможностей и диапазонов применения: теоретические и методологические вопросы отображения социально-экономических процессов и систем в виде математических, информационных и компьютерных моделей. Метод оптимального распределения ресурсов Л. В. Канторовича: $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$.

Методы экономико-математического моделирования: математическая статистика, математическое программирование, экономическая кибернетика, исследование операций, системный анализ, теория игр, теория графов, теория экстремальных задач, эконометрика, теория массового обслуживания, сетевое планирование и управление.

Этапы моделирования: анализ теоретических закономерностей, выбор методов решения, анализ полученных результатов.

Применение экономико-математического моделирования: примеры использования в планировании и прогнозировании.

Курс «Основы математических и инструментальных методов экономического анализа» направлен на обучение специалистов высшей квалификации решению широкого круга проблем менеджмента организаций с помощью математических оптимизационных моделей, формирование умений модификации известных подходов с учетом специфики конкретной организации и глобально нестабильных внешних экономических проявлений. Как отмечают исследователи: «Математический анализ здесь выступает не только теорией, но и инструментом прогнозирования дисбалансов»¹.

В рамках дисциплины предполагается обзор математического аппарата экономических исследований и его внедрение в инструментальные средства для повышения обоснованности управленческих решений на всех уровнях экономики, а также использование информационных технологий для решения экономических и управленческих задач.

Объектами изучения данной дисциплины являются социально-экономические общественные отношения, возникающие при управлении организациями всех организационно-правовых форм, объединениями и союзами, экономическими регионами, национальными и международными экономическими системами, домохозяйствами.

Предметом исследований выступают социально-экономические процессы и явления, протекающие в экономических системах, практика применения математических и инструментальных методов, принципы формирования критериев и оснований для эффективного управления в контексте достижения национальных целей и решения стратегических задач развития Российской Федерации.

Сегодня мы начнём с темы, как в СССР зарождалась наука об эффективном управлении и почему математика стала ответом на управленческий кризис тридцатых годов.

Первый пятилетний план (1929–1932) ставил перед страной невероятно амбициозные задачи: ежегодный рост экономики на 20%, а промышленности – на 25%. На бумаге это выглядело как мощный рывок вперед, однако на деле жесткая политика руководства игнорировала реальные возможности страны. Властям хотелось всего и сразу, что приводило к принятию рискованных и непродуманных решений. Планы постоянно пересматривались в сторону увеличения, заводы начинали строить одновременно по всей стране, не имея для этого достаточно средств и материалов.

¹ Математический анализ устойчивости рыночного равновесия / Е. А. Джалмухамбетова, А. Р. Гайсина, А. А. Тошпулотов, А. Р. Безпалько // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2026. – Т. 3, №1 (166). – С. 46-56. – DOI 10.36871/ek.up.p.r.2026.01.03.003.

Это привело к хаосу, при котором деньги, техника и рабочие распределялись между сотнями строек тонким слоем. Проекты замораживались, превращаясь в бесконечные долгострои, которые не давали продукции. Если в начале первой пятилетки промышленность еще росла быстро (на 23%), то к 1933 году ресурсы закончились, и темпы упали до критических 5,5%². Несмотря на этот провал, такую же ошибку управления повторяли снова и снова в следующие годы.

Именно в этой сложной обстановке работал Леонид Канторович. Он был математическим вундеркиндом: в 14 лет стал студентом университета, в 22 года уже преподавал как профессор в ЛГУ, а в 1935-м получил высшую ученую степень доктора наук без защиты диссертации за свои выдающиеся работы.

Работая в строительном институте, Канторович задумался над простой проблемой: как распределить станки и материалы так, чтобы построить объект быстрее и дешевле? Ключевым вкладом в теорию менеджмента стала постановка экстремальной задачи: максимизировать функционал выпуска (или минимизировать издержки) при заданном наборе жестких ограничений по ресурсам ($Ax \leq b$). Канторович предложил алгоритм улучшения плана через оценку ресурсов объективно обусловленными оценками. Для аудиторки исследователей важно понимать, что советский ученый первым доказал, что оптимальное распределение в сложной системе достигается не интуитивным поиском администратором, а расчетом теневых цен ресурсов, которые сегодня мы называем двойственными переменными. Это заложило фундамент современного проектного и операционного менеджмента.

Главный прорыв заключался в том, что Леонид Канторович предложил искать «идеальный» вариант плана с помощью формул. Вместо того чтобы гадать, как оптимально раскроить фанеру (стратегически важный ресурс того времени) для производства изделий, нужно было составить уравнение. Цель – получить максимум результата при ограниченных запасах ресурсов. Так родилась линейная оптимизация. Канторович доказал, что управлять эффективно можно только тогда, когда знаешь реальную стоимость каждого ресурса. Эти скрытые цены сегодня называют двойственными оценками, и они лежат в основе любого современного бизнес-планирования.

² Советский социолог, философ, историк революционного движения В.З. Роговин писал: «Нереальность этого "большого скачка" обнаружилась уже в 1932 году, когда оказалось, что производство электроэнергии составило лишь 13,5 млрд кВт/ч, (против 22 млрд по первому пятилетнему плану), добыча угля – 64,4 млн тонн (против 75 млн тонн), выплавка чугуна – 6,2 млн тонн (против 10 млн тонн). Еще менее утешительными явились итоги 1933 года, в котором прирост промышленной продукции составил всего 5,5 % (против 16,5 % по годовому плану и 25,2 % по оптимальному варианту первой пятилетки)». Роговин В.З. Сталинский неонеп. М., 1995. – 384 с.

История науки знает удивительные примеры того, как великие открытия совершаются разными людьми одновременно. Именно так произошло и с линейным программированием.

Интересно, что в те же годы, когда Канторович выводил свои формулы в Ленинграде, по другую сторону океана, в США, над той же математической проблемой бился американский экономист голландского происхождения Тьяллинг Чарлз Купманс. Он работал совершенно независимо от советского коллеги – из-за политической изоляции, железного занавеса они ничего не знали о трудах друг друга. Однако логика экономики привела их к абсолютно идентичным результатам: Купманс также пришел к выводу, что распределение ресурсов можно описать строгими математическими моделями для достижения максимальной эффективности.

Мировое признание пришло к ним обоим лишь спустя десятилетия напряженной работы. В 1975 году Леонид Витальевич Канторович и Тьяллинг Чарлз Купманс совместно получили Нобелевскую премию по экономике. Официальная формулировка Шведской королевской академии наук гласила: «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов»³. Математические законы оптимизации работают одинаково эффективно и в условиях плановой социалистической экономики СССР, и в рамках свободного рынка Соединенных Штатов. «Своими исследованиями Канторович оказал значительное влияние на экономические дискуссии в Советском Союзе. Он стал самым выдающимся представителем «математической школы» советских экономистов и, соответственно, группы ученых, выступающих за реформу методов централизованного планирования» (перевод автора). Об этом в презентационной речи сказал профессор Рагнар Бенцель из Королевской академии наук⁴. Математический аппарат оказался выше идеологических противоречий, доказав, что поиск кратчайшего пути к цели при ограниченных ресурсах – это объективная задача любого управленца в любой стране мира.

Также отметим Джорджа Бернарда Дáнцига. Это американский математик, известен как разработчик алгоритма, применяемого в решениях задач симплекс-методом. Считается основоположником линейного программирования, наряду с Леонидом Канторовичем и Тьяллингом Купмансом.

³Пресс-релиз от 14 октября 1975 года. Шведская королевская академия наук. URL: <https://www.nobel-prize.org/prizes/economic-sciences/1975/press-release/> (дата обращения: 02.08.2026)

⁴Речь на церемонии награждения. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975/ceremony-speech/> (дата обращения: 02.08.2026)

Суть метода заключается в поиске наилучшего плана действий (оптимизации) при наличии ряда ограничений (бюджет, время, производственные мощности). В зависимости от математической природы задачи различают следующие основные классы моделей:

- зависимость между показателями прямо пропорциональна (например, распределение грузовиков по маршрутам), это линейное программирование;
- эффективность растет замедленно или имеет пик (сложные химические процессы, ценообразование), это нелинейное программирование;
- планирование многоэтапных процессов во времени (формирование инвестиционного портфеля на 5 лет), это динамическое программирование;
- варианты неделимы (выбор места под строительство завода "да/нет"), это дискретное программирование.

Важный лингвистический нюанс – само слово «программирование» в данном контексте исторически означает «составление программы действий» или «планирование ресурсов предприятия», а не написание программного кода. Мы ищем такие значения переменных $x_1, x_2, \dots$, которые составят идеальный производственный план экономического объекта.

Целью изучения дисциплины является приобретение комплексных теоретических и практических знаний о методологических положениях анализа экономических процессов и систем на основе использования экономико-математических методов и инструментальных средств. Освоение важнейших приемов экономического анализа и формирование навыков выбора экономико-математических и инструментальных методов для проведения анализа основных экономических и социальных явлений, применения их в практике управленческой деятельности, понимания сущности используемых экономических показателей.

Использованию экономико-математических методов в управлении посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов. Среди фундаментальных работ выделяются труды И. Ансоффа, В.Г. Болтянского, К. Дугерти, Ф.Р. Дэвида, Л.В. Канторовича, Г.Б. Клейнера и др. Применительно к компетентностно-ориентированной подготовке студентов и аспирантов отметим работы Н.Е. Ефремовой, Н.А. Македошиной, О.С. Сухарева; специфика и роль прикладной математики в научном аппарате, прикладные аспекты высшей математики в менеджменте и основные математические компетенции менеджера определены А.Г. Демченко, применение математического инструментария в части государственного управления в сфере межбюджет-

ного регулирования и в части корпоративного управления рассматривалось И.В. Яковенко и автором. Необходимость адаптации системы образования к новым условиям отмечал В.В. Иванов. В ряде публикаций отмечается повышение экономической эффективности бизнеса при использовании математических методов Doroshin & Kazaryan, Anukiruthika & Jayas, Edalatpour, Mirzapour Al-e-Hashem, Ghasemi.

Будущий специалист высшей квалификации должен выполнить следующие задачи:

1. изучить этапы развития науки о применении математических методов в экономике, характер экономических законов, закономерности и тенденции экономических явлений и процессов в конкретных условиях организации;
2. овладеть совокупностью приемов и методов проведения комплексного анализа и диагностики экономической деятельности организации;
3. развить логическое и алгоритмическое мышление, выработать умение самостоятельно использовать математические знания, освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи;
4. создать у аспирантов навык применения методов детерминированного и недетерминированного анализа к конкретным проблемам экономики;
5. выработать умение анализировать первичные данные и строить на этой базе количественные модели;
6. усвоить методологии использования математических и инструментальных методов в научных исследованиях в сфере экономики и менеджмента;
7. сформировать умения и навыки применения полученных знаний в практической деятельности управления организацией.

В результате изучения дисциплины «Основы математических и инструментальных методов экономического анализа» аспирант должен:

знать: знать фундаментальные основы экономической математики, включая математический анализ и дифференциальные уравнения, необходимые для решения задач, возникающих в практической деятельности; владеть первичными навыками использования математического аппарата для выработки системного подхода к решению поставленных задач; основные

положения научного управления, генезис мировой управленческой мысли.

уметь самостоятельно находить математический аппарат, содержащийся в литературе по профилю обучения, критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи, выбирать соответствующий метод решения задачи, рассматривать различные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки; строить математические модели принятия решений; проводить численные исследования математических моделей на компьютере и анализировать результаты вычислений;

владеть навыком обработки информации, навыком ведения статистического учета, прогнозировать и осуществлять расчеты экономической и инвестиционной эффективности; владеть методами принятия оптимальных решений в различных условиях неопределенности; владеть приемами постановки задач организационного управления и на основе описательных задач строить математические модели.

Разберём подробнее тему «Линейное программирование». Данный метод используется для оптимизации распределения ограниченных ресурсов. Он позволяет определить такой план производства или логистики, при котором достигается максимум прибыли или минимум затрат. На практике применяется при планировании производственных программ, транспортных потоков и управлении запасами. Линейное программирование занимает центральное место в системе экономико-математических методов и является одним из наиболее эффективных инструментов оптимизации управленческих решений.

Фундаментальный прорыв Леонида Витальевича Канторовича заключался в смене парадигмы: он перевел экономику из области качественных описаний («нужно производить больше и лучше») в область строгой количественной оптимизации. Таким образом, теория Канторовича превращает управление из искусства интуиции в точную инженерную дисциплину, где максимальная экономическая эффективность достигается путем нахождения оптимального баланса между нашими желаниями (целевой функцией⁵) и суровой реальностью (ограничениями). Линейное программирование представляет собой метод нахождения оптимального решения при наличии ограниченных ресурсов и линейных зависимостей между переменными.

Целевая функция имеет вид:

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

⁵ Целевая функция представляет семейство параллельных прямых, которые сдвигаются до последнего касания допустимой области.

где переменные x_i отражают управляемые решения (например, объёмы производства), а коэффициенты a_i – вклад каждой переменной в общий результат (прибыль или затраты).

Основная задача заключается в нахождении такого набора переменных, который максимизирует или минимизирует целевую функцию при заданных ограничениях.

Экономическое значение метода линейного программирования позволяет находить оптимальное распределение ограниченных ресурсов, максимизировать прибыль предприятия, минимизировать издержки производства и логистики.

На практике он применяется при составлении производственных планов, распределении сырья, транспортных задачах и управлении запасами.

Рассмотрим классическую задачу линейного программирования на примере производственного планирования.

Условие задачи:

Предприятие выпускает два вида продукции: x_1 и x_2 . Прибыль от единицы продукции: $x_1 - 40$, $x_2 - 30$.

Производство ограничено ресурсами: сырьё: в наличии 100 единиц; на производство единицы x_1 требуется 2 единицы сырья, на $x_2 - 1$ единица; труд: в наличии 80 единиц; каждая единица продукции требует 1 единицу труда. Неотрицательность: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Целевая функция: $L = 40x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$

Решение:

1. Найдём угловые точки допустимой области.

Пересечение ограничений: $2x_1 + x_2 = 100$, $x_1 + x_2 = 80$.

Вычтем второе из первого: $x_1 = 20$.

Подставим: $20 + x_2 = 80 \rightarrow x_2 = 60$.

Точка: (20; 60)

Другие точки: $(0; 80)$, $(50; 0)$, $(0; 0)$

2. Подставим в целевую функцию

$$(0;0): L = 0$$

$$(0;80): L = 2400$$

$$(50;0): L = 2000$$

$$(20;60): L = 2600$$

Оптимальное решение. Максимум достигается в точке: $x_1 = 20$, $x_2 = 60$.

Максимальная прибыль: $L = 2600$.

Оптимальный план показывает, что предприятию выгоднее производить комбинацию двух продуктов, а не концентрироваться на одном.

В оптимальной точке оба ограничения выполняются как равенства: $2 \cdot 20 + 60 = 100$ (сырьё полностью использовано); $20 + 60 = 80$ (труд полностью использован). Оба ресурса используются полностью – это признак оптимальности решения. Если бы один из ресурсов оставался неиспользованным, можно было бы увеличить выпуск и прибыль.

Почему ограничения именно такие?

Ограничения отражают реальные ресурсы предприятия:

$2x_1 + x_2 \leq 100$ – имеется 100 единиц сырья. На производство:

x_1 требуется 2 единицы сырья,

x_2 – 1 единица.

$x_1 + x_2 \leq 80$ – имеется 80 единиц трудовых ресурсов:

каждая единица продукции требует 1 единицу труда.

Таким образом, числа 100 и 80 – это заданные запасы ресурсов, а коэффициенты – нормы их расхода.

Оптимальное решение в линейном программировании всегда достигается в угловой точке допустимой области.

В данной задаче оба ограничения являются активными (связывающими), что указывает на их дефицитность и определяющую роль в формировании оптимального плана. В практической деятельности придётся добавить экономический смысл, т. е. сколько «стоит» дополнительная единица ресурса? Кроме того, придётся ввести теневые цены ресурсов⁶, показать, какой ресурс «дороже». В реальной ситуации понадобится добавить третий ресурс, например, оборудование: $3 \times 1 + 2 \times 2 \leq 150$, а также четвертый и пятый ресурсы (цену эл. энергии, упаковки и т. д.), и это изменит оптимум.

Давайте разберем эту суть подробнее через призму математического моделирования:

1. Универсализация задачи (Максимизация при ограничениях).

Канторович доказал, что совершенно разные на первый взгляд управленческие вопросы – от распределения грузовиков по маршрутам до раскроя листового металла или составления меню в столовой – имеют идентичную математическую структуру. Любая экономическая проблема сводится к поиску экстремума функции при заданных условиях.

Целевая функция (L): то, что мы хотим улучшить. Например, максимизировать прибыль ($L \rightarrow \max$) или минимизировать время выполнения работ ($L \rightarrow \min$).

Система ограничений: реальность, в которой существует бизнес. Это наши лимиты: запас сырья на складе, количество рабочих часов, мощность станков, объем рынка сбыта. Математически это записывается как система линейных неравенств:

$$\begin{cases} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0), \end{cases}$$

где b_i – доступный ресурс, а a_{ij} – расход этого ресурса на единицу продукции.

⁶ Теневые цены ресурсов – это экономические показатели, которые показывают, на сколько увеличится (или уменьшится) максимальное значение целевой функции (например, прибыли) при небольшом увеличении (на единицу) запаса конкретного ресурса, при условии, что остальные условия задачи остаются неизменными.

2. Инструмент решения (Линейное программирование).

Поскольку Канторович предполагал пропорциональность затрат и выпуска (линейную зависимость), для решения таких задач идеально подошло линейное программирование. Геометрически решение такой задачи всегда находится в вершинах многогранника допустимых решений. Вместо перебора тысяч вариантов «на глаз» метод позволяет пройти по границам этого многогранника (симплекс-метод) и найти единственную точку, где целевая функция достигает пика.

3. Результат (Двойственные оценки и эффективность).

Главный секрет эффективности кроется не только в самом плане производства ($x_1, x_2, \dots$), но и в так называемых двойственных оценках. Когда алгоритм решает задачу, он попутно вычисляет «скрытую стоимость» каждого дефицитного ресурса. Если оценка ресурса равна нулю, значит, его у нас в избытке. Если оценка высокая (например, час работы уникального комплекса MRT стоит для предприятия 5000 рублей прибыли), то менеджер понимает: простой этого комплекса обходится дороже, чем зарплата десяти рабочих. Это дает инструмент для объективного ценообразования внутри предприятия и жесткого контроля над эффективностью. Мы перестаем тратить деньги там, где отдача минимальна, и направляем все силы на использование самых ценных ресурсов.

В современной экономике прикладные методы играют ключевую роль в обосновании управленческих решений, позволяя перейти от интуитивных оценок к строгому количественному анализу. Рассмотрим кратко несколько наиболее часто применяемых методов.

Эконометрика. Эконометрические модели объединяют экономическую теорию, статистику и математические методы. Они широко применяются для прогнозирования спроса, анализа поведения потребителей и управления запасами. Например, на основе временных рядов можно предсказать сезонные колебания продаж.

Теория игр. Теория игр используется для анализа стратегического взаимодействия экономических субъектов. Она особенно важна в условиях конкуренции, например при формировании ценовой политики. Модели помогают определить оптимальную стратегию с учётом возможных действий конкурентов.

Нелинейные модели. В экономике многие процессы носят нелинейный характер, особенно в финансовой сфере. Нелинейные модели применяются для оценки рисков, анализа волатильности и моделирования кризисных явлений, где простые линейные зависимости не работают.

Нейронные сети. Нейросетевые модели позволяют выявлять сложные закономерности в больших массивах данных. Они активно используются для прогнозирования финансовых рынков, оценки инвестиционных решений и управления цепями поставок благодаря способности обучаться на данных.

Кластерный анализ. Метод направлен на группировку объектов по схожим характеристикам. В маркетинге он применяется для сегментации клиентов, что позволяет разрабатывать более точные стратегии продвижения и персонализированные предложения.

Факторный анализ. Факторный анализ позволяет выявить скрытые факторы, влияющие на результаты деятельности организации. Он применяется для оценки эффективности управления и выявления ключевых драйверов роста.

Регрессионный анализ. Регрессионные модели используются для количественной оценки взаимосвязей между переменными. Они широко применяются при анализе инвестиционных проектов и прогнозировании экономических показателей.

Нелинейные регрессии особенно востребованы в условиях сложных и нестабильных рынков, где зависимости между переменными носят нелинейный характер.

Совокупность прикладных методов формирует инструментальную основу современной экономики, обеспечивая повышение точности прогнозов и эффективности управленческих решений. Некоторые методы подробнее разберём на следующих занятиях.

Лекция 2. Макромодели экономической динамики

Показатели экономической динамики: основные макроэкономические показатели и их динамика. Статические и динамические. Краткосрочные и долгосрочные. Открытые и закрытые. Разработка и исследование макромоделей экономической динамики в условиях равновесия и неравновесия, конкурентной экономики, монополии, олигополии, сочетания различных форм собственности.

Модели Харрода-Домара: $Y=A \times K$; $\Delta K=s \times Y-\delta \times K$; $L=L_0 \times e^{n-t}$. Модель Солоу $Y=A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}$, линейные модели с дискретным и непрерывным временем (модель Леонтьева, модель Неймана). Постановка и решение оптимизационных задач методами линейного программирования. Примеры применения моделей линейного программирования в управлении. Анализ чувствительности решений.

Макромодели экономической динамики – это формализованные способы описания и анализа изменений экономики во времени. Мы будем двигаться от базовых показателей к сложным моделям и прикладным инструментам управления.

Экономическая динамика отражает изменения ключевых макропоказателей: валового внутреннего продукта, инвестиций, потребления, занятости, капитала.

Динамика позволяет выявить тренды, циклы и структурные сдвиги в экономике. Это основной инструмент для прогнозирования и выработки экономической политики.

Показатели классифицируются следующим образом: статические – фиксируют состояние системы в конкретный момент (например, уровень ВВП); динамические – отражают изменения во времени (темпы роста ВВП); кратко-

срочные – характеризуют текущие колебания (деловые циклы); долгосрочные – описывают тренды экономического роста; открытые – учитывают внешнеэкономические связи; закрытые – анализируют экономику без внешнего сектора, измеряют внутренние процессы экономики без учета внешней торговли и международных потоков.

Экономические индексы характеризуют относительные изменения показателей (например, индекс цен или промышленного производства).

Макромодели позволяют описывать экономику как систему взаимосвязанных переменных.

Они строятся для анализа: равновесных состояний (устойчивый рост); неравновесия (кризисы, дисбалансы); различных рыночных структур (конкуренция, монополия, олигополия); смешанных форм собственности.

Аналитическая модель – это вид математического моделирования, где зависимости задаются в виде формул. Моделей экономического роста, применяемых в современной цифровой экономике, множество: модель Солоу, модель Рэмси-Касса-Купманса, модель Ака, модель Харрода-Домара, модель Нельсона-Свенсона, модель распространения технологий – Барро, Сала-и-Мартина. Мы же, с учетом краткости нашего курса, рассмотрим лишь несколько моделей, причем хоть и в сокращенном виде, но без потери смысла.

Модели Харрода–Домара: $Y=A \times K$; $\Delta K=s \times Y-\delta \times K$; $L=L_0 \times e^{n \cdot t}$.

В модели Харрода–Домара используются три уравнения, которые описывают производственную функцию, динамику накопления капитала и рост рабочей силы. Каждый коэффициент в этих уравнениях имеет строго определённый экономический смысл. Раскроем содержание коэффициентов:

1. Производственная функция: $Y=A \times K$

Y – совокупный выпуск (доход) в экономике. Это общий объём всех произведённых товаров и услуг за определённый период, этот показатель и есть валовой внутренний продукт (ВВП).

A – капиталотдача (или предельная производительность капитала). Этот коэффициент показывает, сколько единиц выпуска (Y) производится на одну единицу вложенного капитала (K). В рамках этой упрощённой модели предполагается, что отдача от капитала постоянна, то есть каждая новая единица оборудования приносит одинаковое количество продукта. Важно также различать макроэкономический показатель капиталотдачи для всей страны и аналогич-

ный коэффициент, который рассчитывается на уровне отдельного предприятия по данным его бухгалтерского баланса

K – объём основного капитала в экономике. Это стоимость всех зданий, сооружений, машин и оборудования, используемых в производстве (также часто называемый объёмом основных фондов).

Смысл уравнения: выпуск в экономике прямо пропорционален количеству используемого капитала. Чтобы увеличить производство, нужно увеличить капитал.

2. Динамика накопления капитала: $\Delta K = s \times Y - \delta \times K$

ΔK – изменение запаса капитала за период. Это разница между тем, сколько нового капитала было создано, и тем, сколько старого капитала выбыло.

s – норма сбережений (или норма инвестиций). Это доля от общего дохода (Y), которая не потребляется, а направляется на инвестиции для создания нового капитала. Например, если $s=0.2$, это означает, что 20% всего произведённого в стране дохода идёт на покупку нового оборудования и строительство заводов.

$s \times Y$ – валовые инвестиции. Общий объём новых капитальных благ, созданных в экономике за период.

δ – норма выбытия (или норма амортизации) капитала. Этот коэффициент показывает, какая доля существующего капитала (K) изнашивается, устаревает или выходит из строя за тот же период. Например, если $\delta=0.1$, это значит, что 10% имеющегося оборудования ежегодно списывается.

$\delta \times K$ – амортизационные отчисления. Объём капитала, который необходимо просто заменить для поддержания текущего уровня производства.

Смысл уравнения: изменение капитала в экономике равно валовым инвестициям за вычетом выбытия. Если инвестиции больше выбытия ($s \times Y > \delta \times K$), то изменение капитала становится положительным ($\Delta K > 0$).

Рост рабочей силы: $L = L_0 \times e^{n \times t}$

L – объём рабочей силы (трудовых ресурсов) в момент времени t .

L_0 – начальный объём рабочей силы в базовый момент времени (при $t=0$).

e – математическая константа, основание натурального логарифма (приблизительно 2.71828).

n – темп роста населения (и, соответственно, рабочей силы). Это постоянный темп, с которым увеличивается количество работников в экономике.

t – время.

Смысл уравнения: рабочая сила в модели растёт экспоненциально с постоянным темпом n . Это означает, что для поддержания постоянного уровня благосостояния на душу населения экономика должна расти как минимум с той же скоростью, что и население.

Смысл модели: экономический рост определяется инвестициями, модель решает ключевую проблему – устойчивость роста. Своё название модели получили в честь двух учёных-экономистов: англичанина Роя Харрода, который предложил свою теорию в 1939 году, и американца Евсея Домара, опубликовавшего похожую работу в 1946-м. Позже, в 1956 году, экономист Роберт Солоу объединил их идеи в одну общую теорию, которую мы сегодня и знаем как модели Харрода-Домара. Модели роста, представленные отдельно Е. Домаром и Р. Харродом, – первая попытка обобщить процессы, рассматриваемые в рамках кейнсианской модели, распространив их с краткосрочного периода на долгосрочный.

Модель Харрода-Домара – это своего рода экономический тренажёр, который помогает понять, от чего зависит рост экономики страны. Представьте экономику как большой механизм: чтобы он работал быстрее и производил больше товаров, в него нужно постоянно вкладывать деньги (инвестиции). Эта модель объясняет, что скорость роста всей экономики напрямую зависит от двух простых вещей: сколько денег люди и компании откладывают (сберегают), чтобы потом вложить их в дело, и насколько эффективно эти вложения используются для создания нового производства (производительность капитала). Главная идея проста: чем больше мы сберегаем и инвестируем, тем быстрее растёт экономика.

Модель Солоу: $Y = A \times K^\alpha \times L^{(1-\alpha)}$. Модель Солоу (также известная как модель Солоу-Сводна), описываемая производственной функцией $Y = A \times K^\alpha \times L^{(1-\alpha)}$, является краеугольным камнем неоклассической теории экономического роста. В отличие от модели Харрода-Домара, она предполагает убывающую предельную производительность факторов и позволяет экономике сходить к устойчивому состоянию. Давайте разберём каждый компонент и коэффициент в этом уравнении.

Y – это совокупный выпуск (доход) в экономике, который, как и в модели Харрода-Домара, эквивалентен валовому внутреннему продукту (ВВП). Это общая стоимость всех конечных товаров и услуг, произведённых в стране за определённый период.

A – это коэффициент, который часто называют «остатком Солоу» или совокупной факторной производительностью (СФП). Он является мерой технологического прогресса, эффективности институтов, качества управления и других факторов, которые влияют на выпуск, но не сводятся напрямую к увеличению количества капитала или труда. Коэффициент A показывает, насколько эффективно используются капитал и труд.

Если A растёт, то при тех же количествах капитала (K) и труда (L) экономика может произвести больше продукции. Рост A – это главный источник долгосрочного роста благосостояния на душу населения. Он представляет собой технологический прогресс (новые изобретения, более совершенные методы организации производства).

K – это физический объём основного капитала в экономике. Сюда входят все здания, заводы, оборудование, машины и инфраструктура, используемые в производстве.

L – это количество труда, затрачиваемого в экономике. Обычно измеряется в человеко-часах или просто как численность рабочей силы.

α – это ключевой параметр функции – эластичность выпуска по капиталу. Он показывает, **на сколько процентов увеличится выпуск (Y), если объём капитала (K) вырастет на 1%**, при неизменном количестве труда (L) и уровне технологий (A). Коэффициент α представляет собой **долю дохода, приходящуюся на капитал**. В условиях совершенной конкуренции и постоянной отдачи от масштаба весь доход в экономике распределяется между владельцами капитала (в виде прибыли, процентов) и работниками (в виде заработной платы). Доля капитала в общем доходе равна α , а доля труда – $(1-\alpha)$. Значение α всегда находится в интервале от 0 до 1 ($0 < \alpha < 1$). Это отражает закон убывающей предельной производительности капитала: каждая дополнительная единица капитала приносит всё меньше и меньше дополнительного продукта, если количество труда остаётся неизменным.

$(1-\alpha)$ – это симметричный показатель для труда (эластичность выпуска по труду). Он показывает, **на сколько процентов увеличится выпуск (Y), если количество труда (L) вырастет на 1%**, при неизменном объёме капитала (K) и уровне технологий (A). Как уже упоминалось, этот коэффициент представляет собой **долю дохода, приходящуюся на труд**. В сумме доли дохода на ка-

питал и труд дают 100% всего дохода в экономике. Таким образом, функция Кобба–Дугласа⁷, лежащая в основе модели Солоу, не просто описывает выпуск, но и постулирует, как этот выпуск распределяется между основными факторами производства.

Таким образом:

Y: общий выпуск (ВВП).

A: уровень технологий и эффективности (совокупная факторная производительность).

K: объём физического капитала.

L: объём трудовых ресурсов.

α : эластичность выпуска по капиталу; доля дохода капитала.

$(1-\alpha)$: эластичность выпуска по труду; доля дохода труда.

Смысл уравнения: неоклассическая модель роста, учитывающая: капитал, труд и технологический прогресс. Модель показывает существование устойчивого равновесия, роль накопления капитала и технологий и убывающую отдачу факторов.

Линейные модели. Модель Леонтьева

Модель Леонтьева, также известная как модель «затраты-выпуск», – это фундаментальный инструмент в макроэкономике, который описывает взаимосвязи между различными отраслями экономики, используется для анализа межотраслевых связей. Основная идея модели Леонтьева – взаимозависимость. Она была разработана лауреатом Нобелевской премии, экономистом русского происхождения Василием Леонтьевым.

⁷ Функция Кобба–Дугласа используется для описания зависимости выпуска от факторов производства. Это вид производственной функции, который широко используется в экономике для описания технологической связи между количеством произведённой продукции (выпуска) и затраченными ресурсами (факторами производства). Простыми словами, это математическая формула, которая показывает, сколько товаров или услуг можно произвести, имея определённое количество ресурсов, таких как труд и капитал.

Суть модели заключается в том, что продукция одной отрасли часто является сырьём или ресурсом для другой. Например, для производства медицинских инструментов нужна сталь, сталелитейной промышленности – уголь и электроэнергия, а всем им для работы нужны услуги транспорта и финансовые услуги. Модель Леонтьева математически формализует эти связи.

Представьте экономику, состоящую из нескольких отраслей. Чтобы произвести свой конечный продукт (например, автомобиль), каждая отрасль потребляет продукцию других отраслей (сталь, пластик, электронику). Таким образом, выпуск каждой отрасли распределяется на два потока:

Промежуточное потребление: часть продукции идёт на нужды других отраслей.

Конечный спрос: оставшаяся часть продукции идёт конечным потребителям (населению, государству, на экспорт, инвестиции).

Модель описывается двумя основными уравнениями.

1. Балансовое уравнение

Это уравнение говорит, что весь произведённый объём продукции отрасли должен быть равен сумме её поставок всем потребителям.

$$x_i = \sum_{(j=1)}^n x_{ij} + y_i,$$

где:

x_i – общий (валовой) выпуск i -й отрасли.

x_{ij} – объём продукции i -й отрасли, который был использован j -й отраслью в качестве ресурса.

$\sum_{(j=1)}^n x_{ij}$ – суммарное промежуточное потребление i -й отрасли (поставки всем другим отраслям).

y_i – конечный спрос на продукцию i -й отрасли (спрос со стороны потребителей, государства и т. д.).

2. Линейная модель (технологическая матрица)

Это уравнение описывает технологию производства. Оно предполагает, что для производства одной единицы продукции в какой-либо отрасли требуется

фиксированное количество ресурсов из других отраслей.

$$x_{ij} = a_{ij} \times x_j,$$

где:

a_{ij} – коэффициент прямых затрат. Он показывает, сколько единиц продукции i -й отрасли необходимо затратить для производства одной единицы продукции j -й отрасли.

Пример: если для производства 1 тонны стали требуется 0,1 тонны угля, то коэффициент прямых затрат угля на сталь ($a_{\text{уголь, сталь}}$) равен 0,1.

x_j – валовой выпуск j -й отрасли.

Подставив второе уравнение в первое, мы получаем классическую форму модели Леонтьева:

$$x_i = \sum_{(j=1)}^n a_{ij} x_j + y_i.$$

В матричном виде это записывается как: $X = AX + Y$.

Отсюда можно выразить валовой выпуск: $X = (I - A)^{-1} Y$.

Матрица $L = (I - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат. Её элемент l_{ij} показывает, сколько всего продукции i -й отрасли (прямо и косвенно) требуется для производства одной единицы конечного продукта j -й отрасли.

Что позволяет делать модель?

Анализировать структуру экономики. Модель показывает, насколько сильно отрасли зависят друг от друга.

Прогнозировать. Зная прогнозируемый рост конечного спроса (Y), можно рассчитать, насколько должен вырасти выпуск во всех отраслях (X), чтобы этот спрос удовлетворить.

Оценивать влияние шоков. Можно смоделировать, что произойдёт с экономикой, если одна из отраслей (например, энергетика) сократит производство или если резко вырастет спрос на автомобили.

Анализировать мультипликативный эффект. Модель позволяет увидеть "косвенные" эффекты. Например, рост спроса на автомобили приведёт к росту

производства не только в автопроме, но и в металлургии, химической промышленности и т. д.

Смысл уравнения: модель Леонтьева активно используется во всём мире для экономического планирования и анализа. В СССР и России она была основой для разработки межотраслевых балансов. В США модель легла в основу системы национальных счетов и используется Бюро экономического анализа.

Модель Неймана $B \cdot x \geq \lambda \cdot A \cdot x$ (условие осуществимости производства: общий выпуск продукции должен быть не меньше, чем затраты, умноженные на темп роста). Описывает оптимальный сбалансированный рост экономики с учетом технологий и ресурсов. Условие на затраты: $A \cdot x \geq 0$ (Затраты ресурсов не могут быть отрицательными). Условие на выпуск: $B \cdot x > 0$ (Общий выпуск должен быть положительным).

A – матрица затрат. Показывает, сколько единиц каждого ресурса (сырья, труда) требуется для запуска одного производственного процесса.

B – матрица выпуска. Показывает, сколько единиц каждого продукта производится в результате одного производственного процесса.

X – вектор интенсивностей. Указывает, с какой «скоростью» или в каком масштабе работает каждый производственный процесс в экономике.

λ (лямбда) – темп сбалансированного роста. Это главный показатель модели – максимальный темп, с которым может одновременно и пропорционально расти вся экономика.

P – вектор цен. Определяет относительную стоимость всех товаров и ресурсов в экономике.

Модель Джона фон Неймана занимает особое место в теории экономической динамики как одна из наиболее строгих и обобщённых формализаций процесса экономического роста. В отличие от неоклассических моделей, она рассматривает экономику не как агрегированную функцию производства, а как совокупность взаимосвязанных технологических процессов, конкурирующих за ограниченные ресурсы.

Центральным элементом модели является понятие сбалансированного пути роста, при котором все ключевые макроэкономические переменные – выпуск, капитал, ресурсы – увеличиваются одинаковыми темпами. Особенность подхо-

да фон Неймана заключается в поиске максимально возможного темпа роста, который экономика способна поддерживать при заданных технологиях. Этот темп интерпретируется как предельный уровень эффективности использования ресурсов.

Для найденного темпа роста λ существует вектор цен $p \geq 0$, который удовлетворяет следующим условиям:

Условие максимизации прибыли: $B^T \cdot p \leq \lambda \cdot A^T \cdot p$ (Стоимость выпуска по любому процессу не должна превышать стоимость затрат, умноженную на темп роста, иначе этот процесс будет бесконечно прибыльным).

Условие положительной интенсивности: если для какого-то процесса интенсивность $x_j > 0$, то для него должно выполняться равенство: $(B^T \cdot p)_j = \lambda \cdot (A^T \cdot p)_j$ (Это означает, что на оптимальном пути роста используются только те процессы, которые являются экономически эффективными и приносят нулевую "сверхприбыль").

В контексте условия $B^T \cdot p \leq \lambda \cdot A^T \cdot p$ символ A^T означает транспонирование матрицы. Транспонирование – это простая операция в линейной алгебре, при которой строки и столбцы матрицы меняются местами. То есть первая строка становится первым столбцом, вторая строка – вторым столбцом и так далее. Элемент матрицы, который находился в строке i и столбце j , после транспонирования окажется в строке j и столбце i . Это чисто техническое, но необходимое действие для выполнения матричного умножения. Таким образом, запись $A^T \cdot p$ означает, что мы берём матрицу затрат A , транспонируем её (меняем строки и столбцы местами) и уже эту новую матрицу умножаем на вектор цен p .

Простой пример. Допустим, у нас есть матрица A (затраты) размером 2×3 (2 строки, 3 столбца): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

После транспонирования A^T она станет размером 3×2 :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Теперь её можно умножить на вектор цен p , который является вектором – столбцом с 3 элементами.

Важным теоретическим результатом является равенство темпа экономического роста и процентной ставки, что отражает оптимальность распределения капитала и его предельную производительность.

Экономика описывается через набор производственных процессов, каждый из которых характеризуется затратами ресурсов и выпуском продукции. Это позволяет учитывать сложные технологические цепочки и совместное производство, что принципиально отличает модель от агрегированных функций типа Кобба–Дугласа.

Математически модель формализуется с помощью матриц затрат и выпуска, что переводит анализ в область линейной алгебры и оптимизации. Условие воспроизводства требует, чтобы совокупный выпуск превышал затраты на следующий производственный цикл, обеспечивая тем самым устойчивый рост.

По сравнению с моделью Солоу, модель фон Неймана обладает большей гибкостью и универсальностью, так как позволяет анализировать широкий спектр технологических структур. Если неоклассические модели описывают траекторию движения экономики к равновесию, то модель Неймана непосредственно определяет границы возможного роста.

Таким образом, данная модель служит фундаментом для развития теории общего равновесия, оптимального планирования и современных методов анализа экономической динамики.

Анализ чувствительности в экономико-математических методах представляет собой исследование устойчивости оптимального решения к изменениям исходных параметров модели. Речь идёт о том, как изменится результат (например, прибыль, издержки или план производства), если варьируются входные данные: цены ресурсов, объёмы спроса, технологические коэффициенты или ограничения.

Общая формула анализа чувствительности

В самом общем виде, если у нас есть целевая функция Z , которую мы хотим оптимизировать (максимизировать или минимизировать), зависящая от вектора переменных решения x и вектора параметров модели p :

$$Z=f(x;p),$$

то коэффициент чувствительности результата Z^* (оптимального значения целевой функции) к изменению параметра p_i показывает относительное или абсолютное изменение Z^* при изменении p_i на одну единицу.

Наиболее распространенная формула для расчета абсолютного коэффициента чувствительности выглядит так:

$$S_{Z,p_i} = \frac{\partial Z^*}{\partial p_i},$$

где:

S_{Z,p_i} – коэффициент чувствительности оптимального значения целевой функции Z^* к параметру p_i .

$(\partial Z^*)/(\partial p_i)$ – частная производная оптимального значения целевой функции по параметру p_i . Она показывает, на сколько единиц изменится оптимальный результат при бесконечно малом изменении параметра.

Если аналитическое нахождение производной затруднено (что часто бывает в сложных моделях), используют дискретный аналог:

$$S_{Z,p_i} \approx \frac{(Z^*(p_i + \Delta p_i) - Z^*(p_i))}{(\Delta p_i)},$$

где Δp_i – небольшое конечное приращение параметра p_i .

С методологической точки зрения анализ чувствительности особенно важен в задачах линейного программирования. После нахождения оптимального решения проверяется, в каких пределах можно изменять параметры модели без изменения структуры оптимального плана. Это позволяет выделить «критические» параметры, наиболее сильно влияющие на результат.

Часто более информативным является относительный показатель, который показывает процентное изменение результата на один процент изменения параметра:

$$S_{Z,p_i}^{rel} = \frac{\partial Z^*/Z^*}{\partial p_i/p_i} = \frac{p_i}{Z^*} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial p_i}.$$

Символ ∂ – это знак частной производной. Он используется, когда функция зависит от нескольких переменных, и мы хотим посмотреть, как она меняется при изменении только одной из них, считая остальные неизменными. Анализ чувствительности показывает диапазоны устойчивости оптимального решения и выявляет факторы риска.

Практическая значимость метода проявляется в управлении рисками и принятии решений в условиях неопределённости. Анализ чувствительности служит инструментом повышения устойчивости управленческих решений и их адаптации к изменяющимся экономическим условиям. Руководитель может заранее оценить, какие изменения внешней среды приведут к пересмотру стратегии.

Рассмотрим пример. Предприятие выпускает два вида продукции и максимизирует прибыль. Оптимальный план найден при цене ресурса 100 единиц. Анализ чувствительности показывает, что при изменении цены от 90 до 120 структура производства не меняется. Однако при цене выше 120 становится выгодно изменить производственную программу. Это означает, что ресурс является критическим фактором.

Лекция 3. Модели и математические методы анализа микроэкономических процессов

Модели поведения потребителей и производителей: теория потребительского выбора, теория производства. Разработка и исследование моделей и математических методов анализа микроэкономических процессов и систем: отраслей народного хозяйства, организаций, домашних хозяйств, рынков, механизмов формирования спроса и потребления, способов количественной оценки предпринимательских рисков и обоснования инвестиционных решений.

Производственная функция Кобба-Дугласа $Y=A \times K^{\alpha} \times L^{\beta}$ и её варианты. Модели взаимодействия потребителей и производителей: равновесие на рынке, Модель общего равновесия Вальраса.

Функция спроса: $Q_d = a - bP$; Функция предложения $Q_s = c + dP$.

Методы анализа микроэкономических процессов: регрессионный анализ, сценарный прогноз, методы оптимизации. Теория вероятностей и математическая статистика. Вероятностные подходы в принятии управленческих решений. Оценка рисков и неопределенности. Проверка статистических гипотез и выбор оптимального решения.

В рамках микроэкономического анализа ключевое значение приобретают модели поведения потребителей и производителей, позволяющие формализовать процессы выбора и принятия решений в условиях ограниченных ресурсов.

Рассмотрим теорию потребительского выбора, которая исследует, каким образом потребитель распределяет доход между различными благами с целью максимизации полезности. Ограничение задаётся бюджетной линией, а оптимум достигается в точке касания кривой безразличия и бюджетного ограничения.

Теория потребительского выбора – это фундаментальная концепция в микро-экономике, которая формализует процесс принятия решений индивидом. Она описывает, как рациональный потребитель, имея ограниченный доход и сталкиваясь с рыночными ценами, выбирает такой набор товаров, который приносит ему максимальную полезность (удовлетворение).

В основе этой теории лежат три ключевых элемента: полезность, бюджетное ограничение и кривые безразличия.

1. Основные понятия.

Полезность – это субъективное удовлетворение, которое потребитель получает от потребления блага или набора благ. В теории предполагается, что потребитель может ранжировать различные наборы товаров по уровню полезности.

Кривая безразличия – это графическое представление всех комбинаций двух товаров (например, X и Y), которые приносят потребителю одинаковый уровень полезности. Потребителю "безразлично", какой из этих наборов выбрать.

Свойства: кривые безразличия имеют отрицательный наклон (чтобы получить больше одного товара, нужно отказаться от другого), не могут пересекаться и, как правило, выпуклы к началу координат.

Предельная норма замещения (MRS) – это ключевой показатель, который отражает готовность потребителя обменять один товар на другой при сохранении того же уровня полезности. Геометрически это наклон кривой безразличия. По мере движения вдоль кривой безразличия она обычно убывает (закон убывающей предельной нормы замещения), что и обуславливает её выпуклость.

Бюджетное ограничение – это ограничение, которое накладывается на выбор потребителя его доходом и ценами на товары. Оно показывает все комбинации товаров X и Y , которые потребитель может себе позволить.

2. Математическая модель. Бюджетное ограничение.

Пусть:

I – доход потребителя,

P_x – цена товара X ,

P_y – цена товара Y ,

Q_x – количество товара X,

Q_y – количество товара Y.

Уравнение бюджетной линии выглядит так: $P_x \cdot Q_x + P_y \cdot Q_y = I$.

Эту формулу можно преобразовать, чтобы выразить количество одного товара через другой (например, Q_y):

$$Q_y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} \cdot Q_x.$$

Здесь $\frac{I}{P_y}$ – это максимальное количество товара Y, которое можно купить, потратив весь доход. А $\frac{P_x}{P_y}$ – это абсолютный наклон бюджетной линии, который показывает соотношение цен.

Потребитель стремится достичь наивысшей (оптимум потребителя) из возможных кривой безразличия, не выходя за пределы своего бюджета. Графически это означает поиск самой высокой кривой безразличия, которая имеет хотя бы одну общую точку с бюджетной линией.

Оптимальное решение достигается в точке касания бюджетной линии и кривой безразличия. В этой точке наклоны обеих кривых совпадают.

$$\text{Наклон бюджетной линии} = \frac{P_x}{P_y}.$$

$$\text{Наклон кривой безразличия} = MRS_{xy}.$$

$$\text{Условие оптимума: } MRS_{xy} = \frac{P_x}{P_y} \text{ или } MRS_{xy} = \frac{P_x}{P_y}.$$

3. Постановка задачи: Потребитель хочет максимизировать свою полезность $U(Q_x, Q_y)$ при заданном бюджетном ограничении $P_x Q_x + P_y Q_y \leq I$.

Геометрический поиск: Он мысленно или на графике «поднимает» свою исходную кривую безразличия вверх и вправо до тех пор, пока она не коснётся бюджетной линии. Точка касания и будет оптимальным набором товаров (Q_x^*, Q_y^*) .

Смысл условия оптимума ($MRS = \frac{P_x}{P_y}$). Это равенство имеет глубокий экономический смысл. Оно означает, что в точке оптимума субъективная оценка товаров потребителем совпадает с их рыночной оценкой.

MRS показывает, от скольких единиц товара Y потребитель готов отказаться ради одной дополнительной единицы товара X, чтобы его уровень удовлетворения не изменился. Это его личная, субъективная "внутренняя" цена обмена.

P_x/P_y показывает, от скольких единиц товара Y потребитель вынужден отказаться на рынке ради одной дополнительной единицы товара X. Это объективная рыночная цена обмена.

Вывод: если бы $MRS > P_x/P_y$, это означало бы, что потребитель ценит дополнительную единицу товара X выше, чем она стоит на рынке. Ему было бы выгодно покупать больше X и меньше Y. Если бы $MRS < P_x/P_y$, ситуация была бы обратной. Только когда эти две величины равны, у потребителя нет стимула менять свою корзину товаров и достигается состояние равновесия (максимум полезности).

Таким образом, теория потребительского выбора математически доказывает интуитивно понятный факт: рациональный потребитель распределяет свой доход так, чтобы предельная полезность на каждый потраченный рубль была одинаковой для всех покупаемых товаров.

Теория производства, в свою очередь, описывает поведение фирмы, стремящейся максимизировать прибыль или минимизировать издержки при заданной технологии. Теория производства (или теория фирмы) анализирует, как предприятие преобразует экономические ресурсы (факторы производства) в готовую продукцию с целью максимизации прибыли или минимизации издержек. В основе этой теории лежит производственная функция, которая описывает технологическую взаимосвязь между затратами и выпуском.

1. Основные понятия.

Производственная функция – это математическая зависимость, показывающая максимальный объем выпуска продукции (Q), который можно получить при использовании различных комбинаций факторов производства. Чаще всего рассматривается двухфакторная модель:

L (Labor) – труд (например, количество рабочих часов).

K (Capital) – капитал (например, количество станков, площадь цеха). Формула: $Q = f(K, L)$.

Изокванта⁸ – кривая, объединяющая все комбинации труда и капитала, которые позволяют произвести одинаковый объем продукции. По аналогии с кривыми безразличия у потребителя, производителю «безразлично», какую из этих комбинаций использовать, так как результат будет один и тот же.

Предельная норма технологического замещения (MRTS) – показывает, на сколько единиц нужно уменьшить использование одного фактора (например, капитала K) при увеличении использования другого фактора (труда L) на одну единицу, чтобы объем выпуска (Q) остался неизменным. Это наклон изокванты.

Изокошта⁹ – прямая, проходящая через все комбинации ресурсов, которые фирма может приобрести при заданных ценах на эти ресурсы и фиксированном бюджете (C). Это бюджетное ограничение производителя.

2. Математическая модель

Производственная функция

Основной вид функции – функция Кобба-Дугласа: $Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, где A, α , β – параметры, отражающие уровень технологии и эластичность выпуска по факторам.

Издержки и изокоста.

Пусть:

C – общие затраты (бюджет) на факторы производства,

w (wage) – цена единицы труда (ставка заработной платы),

r (rent) – цена единицы капитала (арендная плата за оборудование).

⁸Изокванта (от греч. *isos* – равный и лат. *quantum* – количество) – это кривая на графике, которая соединяет все возможные комбинации факторов производства (например, труда и капитала), обеспечивающие выпуск одного и того же объема продукции. Простыми словами, изокванта показывает все технологически эффективные способы произвести, например, ровно 100 единиц товара. Производителю «безразлично», какую комбинацию ресурсов выбрать с этой кривой, так как результат (объем выпуска) будет одинаковым.

⁹Изокошта (от греч. *isos* – равный и англ. *cost* – издержки) – это линия на графике, которая соединяет все возможные комбинации факторов производства (например, труда и капитала), которые фирма может приобрести при заданном объеме общих затрат (бюджете) и известных ценах на эти факторы. Простыми словами, изокоста показывает «бюджетное ограничение производителя». Это аналог бюджетной линии потребителя, но в мире производства.

Уравнение изокосты выглядит так: $w \cdot L + r \cdot K = C$. Это уравнение прямой в осях K и L . Его можно переписать для анализа: $K = C/r - w/r \cdot L$. Здесь C/r – максимальное количество капитала, которое можно купить на весь бюджет, а w/r – абсолютный наклон изокосты, показывающий соотношение цен на факторы производства.

Условие оптимума (минимизация издержек)

Фирма стремится произвести заданный объем продукции Q с наименьшими возможными издержками. Графически это означает поиск самой низкой изокосты, которая все еще касается целевой изокванты.

Оптимум достигается в точке касания изокванты и изокосты. В этой точке их наклоны равны.

Наклон изокванты = $-MRTS_{LK}$.

Наклон изокосты = $-w/r$.

Следовательно, условие оптимального сочетания факторов производства: $MRTS_{LK} = w/r$.

Более детально, предельная норма замещения равна отношению предельных продуктов факторов: $(MP_L)/(MP_K) = w/r$. Где MP_L (Marginal Product) – предельный продукт труда (дополнительный выпуск от найма еще одного рабочего), а MP_K – предельный продукт капитала.

Эту формулу можно перегруппировать в более интуитивную форму: $(MP_L)/w = (MP_K)/r$.

3. Постановка задачи: Фирма хочет произвести конкретный объем продукции Q (например, 1000 деталей) с минимальными затратами.

Геометрический поиск: на графике с осями Капитал (K) и Труд (L) фирма находит свою целевую изокванту (соответствующую объему Q). Затем она мысленно опускает изокосты (линии равных затрат) вниз до тех пор, пока одна из них не коснется изокванты.

Смысл условия оптимума ($MRTS = w/r$):

$MRTS$ отражает внутреннюю, технологическую взаимозаменяемость ресурсов. Она показывает, насколько легко технология позволяет заменить ручной труд автоматизированным оборудованием.

w/r отражает рыночную взаимозаменяемость ресурсов. Оно показывает, во сколько раз дороже или дешевле стоит единица одного ресурса относительно другого.

Вывод: если бы $MRTS > w/r$, это означало бы, что внутрифирменная эффективность замены капитала трудом выше, чем рыночная стоимость такой замены. Фирме было бы выгодно нанять больше труда и сократить капитал, чтобы снизить издержки. Процесс перераспределения ресурсов продолжался бы до тех пор, пока равенство не восстановилось. Когда $MRTS = w/r$, любое изменение в структуре затрат приведет лишь к росту общих издержек. Таким образом, фирма достигает точки минимума издержек.

Эта же логика применяется и для задачи максимизации прибыли: фирма выбирает такой объем выпуска и такую комбинацию ресурсов, при которых доход от продажи последней единицы любого ресурса равен затратам на эту единицу. Теория производства изучает, как фирма делает товары. У фирмы есть станки (капитал) и рабочие (труд). Её цель – получить максимум прибыли или потратить минимум денег.

Для этого она ищет лучшее сочетание рабочих и станков, чтобы сделать продукт самым дешёвым способом при имеющейся технологии.

Производственная функция Кобба–Дугласа – это одна из самых известных моделей в экономике, позволяющая наглядно описать, как создаётся выпуск продукции за счёт использования основных факторов производства – капитала и труда.

Функция записывается следующим образом: $Y = A \times K^\alpha \times L^\beta$.

Здесь: – Y – объём выпуска (например, количество произведённой продукции); – K – капитал (оборудование, здания, технологии); – L – труд (число работников или затраты труда); – A – уровень технологии, отражающий эффективность производства; – α и β – коэффициенты, показывающие вклад капитала и труда.

Смысл этой модели можно объяснить достаточно просто. Выпуск зависит не только от того, сколько ресурсов использует предприятие, но и от того, насколько эффективно они применяются. Например, одинаковое количество работников и оборудования может давать разный результат в зависимости от уровня технологий или организации производства.

Коэффициенты α и β играют ключевую роль. Они показывают, насколько сильно влияет каждый фактор. Если α больше β , это означает, что капитал (на-

пример, оборудование) важнее для производства, чем труд. Если наоборот – ключевую роль играет человеческий фактор.

Важной особенностью функции является возможность анализа масштабов производства. Если сумма показателей $\alpha + \beta$ равна 1, то имеет место постоянная отдача от масштаба: увеличение всех ресурсов в одинаковое число раз приводит к такому же росту выпуска. Если сумма больше 1 – наблюдается возрастающая отдача (эффект масштаба), если меньше – убывающая.

Существуют и расширенные варианты функции Кобба–Дугласа. Например, в неё могут включаться дополнительные факторы: человеческий капитал, инновации или время, отражающее технический прогресс. В таких моделях параметр A уже не является постоянным, а изменяется, показывая развитие экономики.

Таким образом, функция Кобба–Дугласа – это удобный инструмент для понимания того, как взаимодействуют ресурсы и технологии в процессе производства. Она широко применяется как в теоретических исследованиях, так и в практическом анализе деятельности предприятий и экономики в целом.

Отметим важную составляющую – рыночное равновесие, состояние, при котором интересы покупателей и продавцов совпадают, а рынок «сам себя балансирует». Проще говоря, это ситуация, когда количество товара, которое готовы купить потребители, равно количеству, которое готовы предложить производители.

Для описания этого процесса используются две функции.

Спрос: $Q_d = a - bP$ – показывает, что при росте цены P объём спроса уменьшается.

Предложение: $Q_s = c + dP$ – отражает обратную зависимость: чем выше цена, тем больше товаров производители готовы предложить.

Равновесие достигается в точке, где $Q_d = Q_s$. Именно в этой точке формируются равновесная цена и равновесный объём. Если цена выше равновесной, возникает избыток товара (предложение превышает спрос). Если ниже – дефицит. В обоих случаях рыночные силы (конкуренция, изменение цен) стремятся вернуть систему к равновесию.

Важно понимать, что это не статичное состояние, а динамический процесс. Рынок постоянно реагирует на изменения доходов, предпочтений, технологий и внешних условий.

Более сложный уровень анализа представлен в модели общего равновесия Вальраса. Этот закон был сформулирован французским экономистом Леоном Вальрасом в конце XIX века как часть его модели общего экономического равновесия. В отличие от частичного равновесия, где рассматривается один рынок, Вальрас показал, что все рынки в экономике взаимосвязаны. Например, изменение цен на рынке труда влияет на издержки производства, а значит, и на цены товаров.

Модель общего равновесия Вальраса не сводится к одной формуле – это система взаимосвязанных уравнений, описывающих равновесие на всех рынках одновременно.

Общий вид модели. Для каждого рынка i выполняется условие равновесия:

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = S_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

где: D_i – спрос на i -й товар; S_i – предложение i -го товара; $p_1, p_2, \dots, p_n$ – цены всех товаров в экономике.

Это означает, что спрос и предложение на каждом рынке зависят не только от собственной цены, но и от цен других товаров.

Условие избыточного спроса

Часто модель записывается через функцию избыточного спроса:

$$Z_i(p) = D_i(p) - S_i(p) = 0.$$

Равновесие достигается, когда:

$$Z_i(p) = 0 \text{ для всех } i.$$

Закон Вальраса. Ключевое свойство модели:

$$\sum p_i \times Z_i(p) = 0.$$

Это означает, что если на одних рынках есть избыток спроса, то на других обязательно возникает избыток предложения.

Закон Вальраса показывает взаимосвязанность всех рынков и невозможность общего дисбаланса при соблюдении бюджетных ограничений.

Модель описывает ситуацию, при которой все рынки одновременно находят-

ся в равновесии, цены выполняют координирующую функцию, а ресурсы распределяются эффективно.

Таким образом, модель Вальраса – это система уравнений, где равновесие достигается через согласование спроса и предложения на всех рынках одновременно, и равновесие в экономике – это не просто баланс на одном рынке, а результат согласованного взаимодействия множества рынков, где изменения в одной сфере неизбежно отражаются на других.

Микроэкономические процессы, описывающие поведение отдельных экономических агентов (потребителей и фирм), часто требуют перехода от качественных суждений к строгим количественным оценкам. Для решения этой задачи применяется широкий арсенал математических и статистических методов, которые позволяют формализовать сложные взаимосвязи, проверить гипотезы и найти оптимальные стратегии поведения.

Основой для эмпирического анализа служит регрессионный анализ. Этот метод позволяет выявить и измерить зависимость между различными экономическими переменными. Например, можно построить модель, которая покажет, как спрос на товар зависит от его цены, дохода потребителей или цен на товары-заменители. В простейшем виде такая связь выражается уравнением линейной регрессии: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$, где Y – зависимая переменная (спрос), X – независимая переменная (цена), а β_1 показывает, насколько изменится Y при изменении X на одну единицу. Это даёт возможность не только понять характер связи, но и сделать прогноз.

Однако знания закономерностей недостаточно; необходимо принимать наилучшие управленческие решения. Здесь ключевую роль играют методы оптимизации. Они помогают фирме определить такой объём производства и такую комбинацию ресурсов (труда и капитала), которые максимизируют прибыль или минимизируют издержки. Классическим инструментом здесь выступает аппарат дифференциального исчисления, позволяющий найти экстремум функции прибыли $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, решив уравнение $d\pi/dQ = 0$. Теория игр также относится к методам оптимизации и используется для моделирования стратегического взаимодействия фирм в условиях олигополии.

Поскольку экономика работает в условиях неопределённости, неотъемлемой частью анализа является применение теории вероятностей и математической статистики. Будущие цены, объёмы спроса и действия конкурентов редко известны наверняка. Статистические методы позволяют оценить риски, рассчитать доверительные интервалы для прогнозов и принять взвешенное решение в ситуации неполной информации.

Наконец, для оценки долгосрочных последствий стратегических решений применяется сценарный прогноз. Метод заключается в построении нескольких моделей будущего развития событий (например, пессимистичный, базовый и оптимистичный сценарии) на основе различных предположений о ключевых макро- и микроэкономических факторах. Вероятностные методы позволяют оценивать риски и принимать обоснованные решения. Проверка статистических гипотез помогает подтвердить или опровергнуть экономические предположения.

Анализ этих сценариев помогает руководителям подготовить планы действий для широкого спектра возможных рыночных условий, повышая устойчивость бизнеса, а интеграция этих методов превращает микроэкономику из абстрактной теории в мощный инструмент для принятия практических, основанных на данных решений.

Лекция 4. Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики

Финансовая математика: проценты, внутренняя процентная ставка, теория выбора портфеля, нормальная и логнормальная модели, теория производных финансовых инструментов. Финансовая математика и финансовые инструменты.

$$\text{Оценка инвестиционных проектов } NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} - I_0$$

Модели временной структуры процентных ставок: кривая доходности, форвардные ставки, мгновенная форвардная ставка. Управление рисками с применением финансовых инструментов. Особенности финансового менеджмента и инновационные технологии оценки бизнеса.

Прикладные модели финансовых процессов: эконометрические модели финансовых временных рядов ARIMA, GARCH, VAR.

Как абстрактные формулы, которые мы изучали на школьных уроках алгебры и математического анализа, превращаются в реальные деньги, управляют мировыми рынками и определяют устойчивость банковской системы? Все эти понятия описываются экономической математикой, или, говоря более современно, финтех-математикой. И я хочу показать вам, что финансы – это не просто бухгалтерия с дебетом и кредитом, а сложнейшая динамическая система, описываемая языком дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

Представьте себе финансовый рынок, где тысячи банков, миллионы инвесторов, триллионы рублей, долларов и юаней, которые каждую секунду перемещаются по всему миру. Как предсказать поведение этой гигантской толпы? Как понять, какая цена у акции компании завтра утром? Ответ один: построить математическую модель.

Чтобы наше понимание было структурным, давайте разберем фундаментальные кирпичики, из которых строится здание финансовой математики. Эти понятия – не просто термины из учебника, а операционные инструменты, которыми трейдер на Уолл-стрит или аналитик в Сбере пользуются ежедневно.

Финансовая математика и финансовые инструменты. Финансовая математика – это раздел прикладной математики, описывающий операции с денежными потоками во времени. Финансовый инструмент (акция, облигация, фьючерс) для нас, математиков, является лишь «контрактом» на получение определенных сумм денег в будущем. Мы абстрагируемся от того, производит ли компания нефть или софт; для уравнивания это просто вектор платежей Cft^{10} . Наша задача – найти справедливую стоимость этого вектора сегодня.

Любое финансовое моделирование начинается с концепции временной стоимости денег. Один рубль сегодня стоит больше, чем один рубль через год. Почему? Потому что сегодняшний рубль можно положить в банк под процент или инвестировать. Основа всего – процентная ставка. В банковской практике чаще встречается дискретное начисление $FV = PV \cdot (1+r)^n$. Она предполагает, что проценты начисляются раз в год. Но в реальном мире финансовые потоки непрерывны. Деньги на бирже меняются в цене каждую микросекунду. Чтобы описать этот процесс, математики переходят от школьной алгебры к математическому анализу, а именно к пределам.

Если мы начнем начислять проценты не раз в год, не раз в месяц и даже не раз в секунду, а непрерывно, то число e (число Эйлера, примерно 2,718, здесь возникает потому, что оно идеально описывает органический рост) станет нашим главным инструментом. Формула будущей стоимости превращается в элегантное выражение: $FV = PV \cdot e^{rt}$. Здесь r – ставка, t – время. Эта простая экспонента лежит в основе всех расчетов доходности облигаций и банковских вкладов. Логарифмическая доходность, вытекающая отсюда, обладает уникальным свойством аддитивности, когда доходность за год равна сумме доходностей за каждый день. Понимая производную этой функции, банки рассчитывают дюрацию своих портфелей – показатель того, насколько быстро они вернут вложенные средства при изменении рыночных ставок.

Представьте, что вы вкладываете 100 рублей сегодня, чтобы получать по 30 рублей следующие пять лет. Какова реальная эффективность? IRR – это такая ставка дисконтирования, при которой чистая приведенная стоимость (NPV)

¹⁰ Cft (от английского *Cash Flow*) – это фундаментальное понятие финансовой математики, которое представляет собой упорядоченную последовательность денежных сумм, поступающих или выплачиваемых в определенные моменты времени.

всех будущих доходов становится равной нулю. Математически это корень полинома высокой степени. С точки зрения инвестора, если IRR выше стоимости кредита, проект математически целесообразен.

Главная проблема финансового рынка – неопределенность. Мы не знаем точно, какой будет курс валюты завтра. Но мы можем описать его поведение статистически. Здесь на сцену выходит теория вероятностей и стохастические процессы.

Самый известный инструмент здесь – броуновское движение. В физике оно описывает хаотичное движение пылинок в луче света. В экономике Луи Башелье¹¹ еще в 1900 году предложил использовать эту модель для описания движения цен акций. Идея проста: изменения цены случайны и независимы друг от друга. Если вчера акция выросла на 5%, это никак не помогает нам предсказать, вырастет она сегодня или упадет.

Однако чистая «пьяная походка» броуновского движения не подходит: цены активов не могут быть отрицательными (акция Газпрома не может стоить минус сто рублей), и в долгосрочной перспективе рынки чаще растут, чем падают. Поэтому математики используют геометрическое броуновское движение. Его формула выглядит так: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Не пугайтесь символов. Давайте разберем их вместе:

S_t – цена актива в момент времени t .

dS_t – бесконечно малое изменение этой цены.

μ (мю) – «дрейф». Это средняя доходность, тот самый вектор, который тянет цену вверх.

σ (сигма) – волатильность. Это мера риска, размах колебаний.

dW_t – тот самый «белый шум», случайный толчок из нашего броуновского движения.

Эта дифференциальная формула говорит нам: «Цена меняется за счет постоянного маленького роста (μ), но каждую долю секунды её трясет случайным

¹¹ Луи Башелье (Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870–1946)) – французский математик, которого по праву считают пионером современной финансовой науки. Его главный вклад – применение математического аппарата, в первую очередь теории вероятностей и стохастических процессов, к анализу финансовых рынков. Ключевой работой стала его докторская диссертация «Теория спекуляций» (Théorie de la spéculation), защищённая в Сорбонне в 1900 году под руководством Анри Пуанкаре.

образом (σ)». Имея такую модель, мы можем рассчитать вероятность того, что через месяц доллар будет стоить дороже 100 рублей.

Гарри Марковиц доказал, что риск портфеля зависит не только от риска каждой акции, но и от их взаимной связи – ковариации. Формула риска двух активов:

$$\sigma^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2.$$

Если корреляция ρ мала или отрицательна, общий риск падает. Это математическое обоснование совета «не класть все яйца в одну корзину». Мы строим «эффективную границу» – кривую, где для каждого уровня доходности выбран портфель с минимально возможным риском.

В начале 1970-х годов Фишер Блэк, Майрон Шоулз и Роберт Мертон совершили революцию. Они задались вопросом: сколько должна стоить страховка на акцию? Речь идет об опционах – праве купить или продать акцию в будущем по заранее оговоренной цене.

Они поняли, что сам опцион можно рассматривать как отдельный финансовый инструмент. И если составить портфель из самой акции и страховки (опциона) особым образом, то риск случайных колебаний (σ) взаимно уничтожится. Останется только безрисковый рост, равный ставке по государственному вкладу. Это критически важный момент. Классическая статистика учит нас нормальному распределению («колоколу»). Но цены акций не могут быть отрицательными. Поэтому моделируется не сама цена, а её доходность. Доходность распределена нормально ($N(\mu, \sigma^2)$), а значит, сама цена актива имеет логнормальное распределение. Его график скошен вправо и никогда не пересекает ноль. Именно допущение о логнормальности цен лежит в основе формулы Блэка-Шоулза в частных производных:

$$\partial V / \partial t + 1/2 \sigma^2 S^2 (\partial^2 V) / (\partial S^2) + rS \partial V / \partial S - rV = 0.$$

Оно связывает стоимость опциона (V) со временем (t), ценой акции (S), риском (σ) и безрисковой ставкой (r). Решение этого уравнения позволило создать формулу для точной, справедливой цены любой финансовой гарантии. За это открытие в 1997 году была присуждена Нобелевская премия по экономике. Сегодня ни одна торговая площадка в мире не работает без алгоритмов, решающих это уравнение или его модификации.

Мы разобрали модели для одной акции. Но экономика – это сеть. Банки кредитуют друг друга. Если один крупный банк рухнет, он потянет за собой осталь-

ные. Это называется «эффектом домино». Производный инструмент (опцион, своп) – это контракт, цена которого «производна» от цены базового актива. Главная математическая идея здесь – хеджирование и концепция безрискового арбитража. Мы создаем динамический портфель из самой акции и банковского счета так, чтобы он в точности копировал выплаты по опциону. Если два разных набора активов приносят одинаковый результат в будущем, они должны стоить одинаково сегодня. Любое отклонение будет мгновенно съедено алгоритмами арбитражеров, возвращая систему в состояние математического равновесия.

Чтобы анализировать такие связи, используются методы теории графов и матричного исчисления. Представьте таблицу (матрицу), где строки и столбцы – это банки. На пересечении указана сумма долга одного банка другому. Умножая такие матрицы и вычисляя собственные числа этой системы, математики оценивают системный риск. Мы строим сложные вычислительные модели (агент-ориентированные модели), где каждый виртуальный «агент» (банк или инвестор) живет по своим правилам, покупает и продает активы. Запуская симуляцию тысячи раз, мы смотрим, при каких условиях вся искусственная экономика терпит крах. Именно так центральные банки стран мира тестируют финансовую систему на прочность перед глобальными кризисами.

Классические модели, вроде тех, что я описал выше, предполагают, что люди ведут себя рационально. Но нейробиология и поведенческая экономика доказали, что люди часто ошибаются, паникуют и действуют стадно.

Поэтому современный фронтير экономической математики – это машинное обучение. Вместо того чтобы писать красивое уравнение, мы берем огромный массив данных за последние 50 лет: курсы валют, объемы торгов, заголовки новостей, посты в социальных сетях и даже данные со спутников о заполненности парковок у торговых центров (как индикатор потребительской активности). Нейронная сеть сама находит скрытые закономерности. Она не знает формул, она просто видит паттерн: «Каждый раз, когда индекс страха (VIX) растет одновременно с падением цен на медь, через три дня падает технологический сектор».

Перед вами формула NPV – золотое правило инвестора. Оценка инвестиционных проектов $NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} - I_0$.

Она отвечает на вопрос: «Стоит ли строить завод?». Мы берем все будущие доходы (CF_t), но не просто складываем их. Деление на $(1+r)^t$ учитывает фактор времени: рубль сегодня дороже рубля завтра из-за инфляции и риска r . Мы суммируем эти дисконтированные потоки и вычитаем начальные вложения I_0 . Если результат положителен – проект математически целесообразен.

Представьте, что вы смотрите на погоду в экономике. Финансы – это не застывшие цифры в таблице, а живой климат, где постоянно меняется температура и дуют ветры. Чтобы предсказать этот климат, математики используют специальные модели.

Главный термометр экономики – это процентная ставка. Если мы нарисуем график того, под какой процент государство берет в долг на 1 год, на 5 лет и на 30 лет, мы получим «кривую доходности». Обычно чем дольше срок, тем выше риск и тем больше процент. Но иногда кривая изгибается вниз – это сигнал рынку, что все ждут кризиса или падения инфляции.

Из этой кривой математики умеют высчитывать форвардные ставки. Это своего рода «прогноз погоды» от рынка: какую ставку банк предложит вам через два года? Математики смотрят на сегодняшние цены облигаций и вычисляют эту будущую цену с точностью до копейки. А если мы уменьшим период прогноза до миллисекунды, мы получим мгновенную форвардную ставку – непрерывный поток ожиданий, который используется для оценки сложнейших страховок на рынке.

Бизнес всегда боится штормов: курса доллара, цен на нефть или роста ставок. Чтобы не разориться, используются финансовые инструменты-хамелеоны:

Фьючерсы: вы руководите сельхозкорпорацией и боитесь, что зерно к осени подешевеет? Сегодня вы заключаете контракт о продаже урожая по фиксированной цене. Что бы ни случилось, ваш доход защищен.

Свопы: представьте, что у вас кредит под плавающий процент, который может внезапно вырасти. Свop позволяет договориться с банком и «обменять» его на стабильный, фиксированный процент. Вы надеваете «финансовый скафандр», который гасит удары рыночной стихии.

Раньше бизнес оценивали просто: сколько станков стоит в цеху плюс деньги в кассе. Современный менеджмент смотрит иначе. Инновационная технология здесь – это оценка реальных опционов. Мы считаем не только то, что завод принесет сейчас, но и право владельца завтра запустить новую линию или закрыть старую, если рынок изменится. Это математика гибкости.

Чтобы строить такие графики, нужны алгоритмы. Для этого применяются прикладные модели финансовых процессов: эконометрические модели финансовых временных рядов ARIMA, GARCH, VAR.

Эконометрические модели временных рядов – это математический инструмент, который позволяет анализировать данные, собранные в хронологи-

ческом порядке (например, ежедневные курсы валют или ежесекундные котировки акций), находить в них закономерности и строить прогнозы.

В финансах мы имеем дело с «живыми» данными: они зашумлены, изменчивы и часто зависят от самих себя. Модели ARIMA, GARCH и VAR были разработаны именно для того, чтобы навести порядок в этом хаосе.

1. ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) исходит из предположения, что будущее поведение временного ряда во многом определяется его прошлым поведением. Прогнозирование стабильных показателей с четким трендом или сезонностью (спрос на товары, макроэкономические показатели вроде ВВП). Для прямой цены акций используется редко, но отлично подходит для прогнозирования их доходностей.

AR (Авторегрессия): Текущее значение зависит от предыдущих значений. Пример: если вчера акция выросла на 2%, сегодня она с большой вероятностью тоже вырастет (инерция).

I (Интегрирование / Разность): Большинство финансовых данных нестационарны (их среднее значение и дисперсия меняются со временем, например, инфляция постоянно растет). Чтобы сделать ряд пригодным для анализа, модель берет «разности», то есть анализирует не саму цену, а её изменение ($\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$). Ряд изменений обычно стационарен.

MA (Скольльзящее среднее): Текущее значение зависит от прошлых ошибок прогноза. Если модель вчера ошиблась и недооценила рост, сегодня она внесет поправку на эту ошибку.

2. GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) в отличие от ARIMA, которая предсказывает само значение, GARCH предсказывает риск (насколько сильно цена будет отклоняться от среднего). Расчет кредитных рисков (VaR – Value at Risk), оценка стоимости опционов (где цена напрямую зависит от ожидаемой волатильности), стресс-тестирование банковских портфелей. Ключевое понятие здесь – кластеризация волатильности. На рынках периоды затишья сменяются периодами бури. Если сегодня на бирже произошел обвал, завтра вероятность нового обвала гораздо выше, чем в спокойный день. Волатильность сама себя подпитывает. GARCH описывает условную дисперсию: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$. Это уравнение говорит: «Сегодняшний риск (σ_t) зависит от вчерашней ошибки/шока (ϵ_{t-1}) и вчерашнего уровня риска (σ_{t-1})».

3. VAR (Vector Autoregression). Если ARIMA и GARCH смотрят на один показатель изолированно (например, только курс рубля), VAR рассматривает экономику как систему взаимосвязанных шестеренок.

В модели VAR у нас есть вектор из нескольких переменных ($Y_1, Y_2, \dots$). Модель утверждает, что каждая переменная зависит от своих собственных прошлых значений и от прошлых значений всех остальных переменных в системе. Например: мы хотим спрогнозировать инфляцию. Но инфляция зависит от курса доллара, а курс доллара – от ключевой ставки ЦБ, а ставка ЦБ реагирует на инфляцию. VAR прописывает эти взаимные зависимости в:

ARIMA – это робот-историк. Он анализирует старые данные и говорит: «Обычно после такого роста бывает вот такое падение».

GARCH – специалист по панике. Он заметил, что на бирже волатильность ходит толпами: если сегодня всё трясется, то и завтра будет трясти. Он помогает банкам понять, сколько резервных денег нужно держать на случай шторма.

VAR – сетевой аналитик. Он понимает, что экономика – это паутина. Если упадет цена на нефть (один узел сети), затянет ли это в кризис бюджет России, курс рубля и инфляцию (другие узлы)? Модель VAR просчитывает эти цепные реакции во всей системе сразу.

Финансовая математика учит нас видеть за сухими цифрами живые процессы и использовать логику формул, чтобы превратить хаос рынков в понятную стратегию действий.

Однако здесь возникает главная ловушка – «черный лебедь». Это событие, которого никогда не было в прошлом. Математическая модель, обученная на спокойных данных, всегда провалится во время пандемии или внезапного геополитического шока, потому что в её «опыте» такого не было. Задача современного ученого – не слепо доверять алгоритмам, а встраивать в них механизмы адаптации к неизвестности.

Математика в финансах – это щит и меч. С одной стороны, она позволяет инженерам создавать самые сложные продукты от ваших кредитных карт с кешбэком до страхования урожая сельхозкорпорации от засухи. С другой стороны, чрезмерная вера в идеальные кривые нормального распределения стала одной из причин мирового кризиса 2008 года. Модели создали иллюзию безопасности там, где царил хаос.



Лекция 5. Математические методы и модели анализа и прогнозирования развития социально-экономических процессов. Теория, методология и практика компьютерного эксперимента в социально-экономических исследованиях и задачах управления

Методы прогнозирования: экстраполяция, регрессионный анализ, сценарный прогноз.

Модели социально-экономических процессов: эконометрические модели, имитационные модели, оптимизационные модели.

Анализ и прогнозирование: применение методов и моделей для анализа и прогнозирования социально-экономических процессов.

Интеграция математических методов в диссертацию по менеджменту. Методология написания научной работы с использованием математических методов. Критерии выбора подходящего метода исследования. Оформление результатов и выводов, использование современных стандартов оформления научного текста.

Теоретические основы методологии и инструментария проектирования, разработки и сопровождения информационных систем субъектов экономической деятельности: методы формализованного представления предметной области, программные средства, базы данных, корпоративные хранилища данных, базы знаний, коммуникационные технологии.

Мы живем в эпоху данных. Каждую секунду совершаются миллионы транзакций, публикуются тысячи постов, меняются курсы валют. В этом океане информации невозможно ориентироваться интуитивно. Нам нужен компас. Этим компасом является прикладная математическая экономика.

Я разделю лекцию на три блока: как мы предсказываем будущее (методы), как мы описываем устройство мира (модели) и как вы можете использовать этот инструментарий для написания серьезной научной работы.

Прогнозирование – это не гадание, а расчет наиболее вероятной траектории движения системы.

Экстраполяция. Это самый простой метод, основанный на принципе инерции. Если за последние пять лет продажи вашего любимого бренда смартфонов росли на 10% ежегодно, экстраполяция просто продлевает эту линию вперед. Мы берем исторические данные и ищем функцию тренда. Чаще всего это простая прямая ($y=ax+b$) или плавная парабола. Мы используем метод наименьших квадратов, чтобы найти такую линию, которая проходит максимально близко ко всем точкам прошлого. Как только уравнение найдено, нам остается просто подставить в него будущий год вместо текущего. Если график рос на 10% ежегодно, линейная экстраполяция продлит эту линию вперед с тем же наклоном.

Представьте, что вы смотрите на след самолета в небе. Он прямой и четкий. Логично предположить, что через минуту он будет там же, чуть дальше по курсу. Экстраполяция – это самый простой метод прогнозирования, основанный на фундаментальном принципе инерции: если система двигалась определенным образом в прошлом, она сохранит это движение в ближайшем будущем.

Однако у экстраполяции есть огромный минус: она слепа к изменениям среды. Она предскажет рост населения города, пока внезапно не начнется эпидемия или закрытие градообразующего завода. Экстраполяция говорит нам: «Если ничего не изменится, будет так». Однако у этого метода есть критическая уязвимость. Экстраполяция абсолютно слепа к изменениям внешней среды. Она нарисует взлет акций компании, не зная о завтрашнем введении санкций. Именно поэтому менеджер никогда не доверяет ей слепо, используя её лишь как нулевую точку отсчета для более сложных сценарных моделей.

Регрессионный анализ. Это следующий уровень сложности. Здесь мы признаем, что мир зависит от многих факторов. Продажи мороженого зависят не только от времени (тренда), но и от температуры воздуха. Цена квартиры зависит от района, этажа и близости к метро.

Если экстраполяция – это взгляд в зеркало заднего вида, то регрессионный анализ – это приборная панель автомобиля. Мы признаем очевидный факт: мир устроен сложно, и на любое событие влияет целая совокупность факторов. Продажи мороженого зависят не только от того, что наступило лето (тренд), но и напрямую от температуры воздуха здесь и сейчас. Цена квартиры формируется не случайным образом, а под давлением конкретных характеристик: престижности района, этажа, близости к метро и наличия ремонта.

Математически мы переводим эти связи на язык уравнения множественной линейной регрессии: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \varepsilon$. Здесь Y – то, что мы хотим узнать (зависимая переменная), а X – факторы, которые на это влияют (независимые переменные). Коэффициенты β показывают силу влияния каждого фактора. $\beta_1, \beta_2 \dots$ – коэффициенты регрессии. Это самое важное. Коэффициент показывает силу влияния конкретного фактора. Если β_1 равен $-0,5$, это означает математический факт: каждый дополнительный километр расстояния от метро снижает цену квартиры ровно на 500 тысяч рублей, при условии, что всё остальное остается неизменным.

ε – ошибка модели. Случайный шум, те отклонения, которые мы не смогли объяснить ни расстоянием до метро, ни площадью. Возможно, продавец просто срочно уезжает и готов торговаться.

Суть метода заключается в поиске таких значений коэффициентов β , при которых сумма квадратов отклонений наших прогнозов от реальных данных будет минимальной. Мы буквально натягиваем гиперплоскость через облако точек в многомерном пространстве так, чтобы она проходила максимально близко ко всем реальным сделкам сразу.

В отличие от простой экстраполяции, которая предполагает вечный рост по прямой, регрессия позволяет моделировать качественные изменения среды. Мы можем ввести фиктивную переменную (0 или 1), например, «наличие балкона», и модель сама вычислит его денежную ценность. Однако регрессия требует осторожности: она покажет корреляцию (связь), но не всегда докажет причинность. Кроме того, модель крайне чувствительна к выбросам – одной ошибочно введенной цены («квартира за один рубль») хватит, чтобы полностью исказить результаты расчетов.

Этот метод позволяет отвечать на вопросы типа: «На сколько упадут продажи кондиционеров, если лето будет холоднее нормы на два градуса?». Он учитывает причинно-следственные связи.

Сценарный прогноз. Будущее принципиально неопределенно. Мы не знаем, какой будет цена на нефть через год. Но мы можем построить дерево сцена-

риев. Сценарий А: конфликт разгорается, нефть стоит 150 долларов. Сценарий Б: стабильность, нефть – 70 долларов. Сценарий В: кризис перепроизводства, нефть – 30 долларов. Экстраполяция дает нам одну цифру, регрессия – формулу зависимости. Но оба этих метода пасуют перед главным свойством будущего – его принципиальной неопределенностью. Мы не знаем, какой будет курс доллара через год, разрешится ли торговый конфликт между сверхдержавами и совершит ли научный прорыв лаборатория за углом. Пытаться угадать одно «правильное» число в таких условиях – математическая самонадеянность.

Здесь на сцену выходит сценарный анализ. Его философия заключается не в предсказании будущего, а в подготовке к нему. Вместо одной линии мы строим целое дерево вероятностей или, как говорят математики, создаем ансамбль траекторий. Для каждого сценария мы пересчитываем нашу регрессионную модель. Это похоже на симуляцию жизни в компьютерной игре: математики создают несколько параллельных вселенных с разными правилами и смотрят, где компания выживет, а где обанкротится. Это самый надежный инструмент стратегического планирования сегодня.

Процесс разработки выглядит следующим образом:

Выделение драйверов. Сначала мы определяем ключевые внешние факторы (экзогенные переменные), которые компания контролировать не может. Это макроэкономика: инфляция, ключевая ставка ЦБ, цена на нефть Brent, геополитические индексы.

Конструирование миров. Мы задаем логически непротиворечивые комбинации этих факторов.

Базовый сценарий: консенсус-прогноз аналитиков. Всё идет своим чередом.

Оптимистичный сценарий («Бум»): цены на ресурсы растут, санкции отменяются, потребительский спрос бьет рекорды.

Пессимистичный сценарий («Черный лебедь»): глобальная рецессия, разрыв логистических цепочек, падение покупательной способности.

Стресс-тестирование моделей. И вот здесь происходит самое интересное с точки зрения вычислений. Мы берем нашу уже построенную ранее регрессионную модель прибыли компании:

$$\text{Прибыль} = \beta_0 + \beta_1 (\text{Цена}_{\text{нефти}}) + \beta_2 (\text{Курс}_{\text{валюты}}) + \dots$$

И начинаем подставлять в неё значения из разных миров. Для сценария «Бум»

вводим высокую цену нефти и слабый рубль. Для сценария «Крах» – наоборот.

Это напоминает загрузку сохранений в сложной компьютерной игре. Математики буквально запускают симуляцию жизни бизнеса в нескольких параллельных вселенных одновременно. В результате мы получаем не один ответ, а диапазон возможных исходов: от банкротства при цене нефти 30 долларов до сверхприбылей при цене 150.

Для визуализации часто используют матрицу 2×2 , где по осям отложены два главных драйвера (например, «Темп роста рынка» и «Доля рынка компании»). Это позволяет руководству увидеть стратегическую вилку решений. Сценарный прогноз сегодня является золотым стандартом риск-менеджмента, так как он учит менеджмент действовать гибко: иметь план «А», план «Б» и заранее подготовленный протокол действий для каждого варианта развития событий.

Метод – это техника расчета, а модель – это цифровое отражение самой экономики.

Эконометрические модели. Это классика макроэкономики. Представьте себе огромную систему линейных уравнений, где сотни зависимых переменных связаны друг с другом. Потребление домохозяйств зависит от их дохода, доход фирм зависит от инвестиций, инвестиции зависят от процентной ставки. Центробанк, а ставка зависит от инфляции. Эконометрика берет реальные статистические данные страны за 30–40 лет и вычисляет параметры этих связей. Получившаяся модель ведет себя как настоящая экономика. Значит, если мы вводим в нее шок (например, санкции), цифры внутри начинают перестраиваться, показывая эффект домино во всех отраслях.

Если регрессионный анализ позволяет нам изучить влияние одного фактора на другой, то эконометрика макроуровня – это попытка создать полноценный «цифровой двойник» целой страны. Представьте себе не одно уравнение, а гигантскую, переплетенную систему из сотен и даже тысяч линейных зависимостей. Это математическая паутина, где каждое звено тянет за собой остальные.

Логика здесь строится по цепочке причинно-следственных связей, которые мы наблюдаем в реальности:

Потребление домохозяйств напрямую зависит от их располагаемого дохода (чем больше зарплата, тем чаще походы в рестораны).

Доход фирм, в свою очередь, формируется из того самого потребления граждан плюс государственные закупки и экспорт.

Инвестиции бизнеса зависят от стоимости денег: если процентная ставка Центробанка высока, кредиты дорогие и заводы строят реже.

А сама процентная ставка устанавливается регулятором как реакция на инфляцию.

Заметьте: потребление влияет на инвестиции через доход, а инвестиции влияют на потребление через рабочие места. Экономика закольцована.

Чтобы эта абстрактная схема ожила, эконометристы берут массив реальных исторических данных государственной статистики, обычно это годовые показатели за последние 30–50 лет. С помощью метода наименьших квадратов и более сложных алгоритмов инструментального переменного компьютер вычисляет параметры (β) для каждого уравнения. Мы получаем точные веса: например, мы теперь знаем математически точно, что рост ставки ЦБ на 1% снижает объем частных инвестиций ровно на 2,5% с лагом в полгода.

Получившаяся модель начинает вести себя как настоящая экономика. Она обладает внутренней устойчивостью и логикой. Теперь мы можем провести виртуальный эксперимент, который в реальности был бы невозможен или разрушителен. Мы вводим в систему экзогенный шок – например, резкое падение цен на энергоносители или введение масштабных международных санкций.

В этот момент внутри системы срабатывает «эффект домино». Цифры начинают перестраиваться согласно заложенным уравнениям:

Падает экспортная выручка → снижается ВВП.

Снижается ВВП → падают доходы бюджета и населения.

Падают доходы → сокращается импорт и потребление.

Возникает девальвация валюты → растет инфляция → Центробанк вынужден поднять ставку...

Мы буквально смотрим кино о том, как кризис будет развиваться во времени в разных отраслях. Именно так правительственные аналитические центры оценивают последствия изменения налогового законодательства еще до того, как оно подписано президентом. Математика здесь служит предохранителем, позволяющим увидеть побочные эффекты политических решений.

Если эконометрика описывает равновесие, то имитация описывает процесс. Имитационные модели: выращивание экономики в пробирке. Эти модели осно-

ваны на агентном подходе. Мы создаем виртуальных «агентов» – потребителей, банки, магазины, логистические компании или трейдеры на бирже.

Каждому из этих агентов мы прописываем локальный алгоритм поведения – набор простых правил типа «если... то...» («если вижу скидку – покупаю», «если риск высокий – не даю кредит»). Затем нажимаем кнопку «Пуск» и смотрим, как эти агенты взаимодействуют. Агенты начинают сталкиваться друг с другом в цифровом пространстве: покупать, продавать, брать кредиты, разоряться или богатеть. Из простых правил рождается сложное эмерджентное поведение. Именно так сейчас тестируют алгоритмы беспилотных машин и моделируют распространение паники на биржах.

Если эконометрические модели – это попытка описать экономику как единый часовой механизм, стремящийся к равновесию, то имитационное моделирование (часто называемое Agent-Based Modeling или ABM) – это создание цифрового аквариума, внутри которого живет искусственный мир. Здесь мы не пишем одно гигантское уравнение для всего рынка. Вместо этого мы спускаемся на уровень индивидов.

Например:

Потребитель: «Если мой баланс больше 10 000 и я вижу скидку на кроссовки более 20%, я совершаю покупку. Если нет – жду зарплаты».

Банк: «Если кредитная история клиента чистая, выдай заем под 15%. Если риск просрочки выше 50% – отказывай».

Магазин: «Если остатки товара на складе упали ниже 5 единиц, сделай заказ поставщику и подними цену на 5% из-за дефицита».

Именно здесь возникает самое интересное явление – эмерджентность. Из миллионов простых, детерминированных действий отдельных участников рождается сложное, непредсказуемое поведение всей системы. На графике вдруг возникают циклы кризисов перепроизводства, образуются пробки на виртуальных дорогах или вспыхивают панические распродажи на цифровой бирже, хотя ни одному агенту изначально команду «паникуй» никто не давал.

Этот метод незаменим там, где классическая математика бессильна.

Беспилотный транспорт: инженеры создают симуляцию перекрестка, где тысячи машин-агентов пытаются проехать одновременно. Простые правила («держи дистанцию», «уступи помехе справа») позволяют отработать алгоритмы безопасности без риска реальных аварий.

Распространение паники: финансовые регуляторы моделируют действия трейдеров. Правило простое: «Если сосед начал продавать актив, а цена падает – продавай тоже». Так ученые изучают механизмы обвалов.

Эпидемиология: моделирование того, как вирус распространяется по городу в зависимости от графика работы метро и плотности застройки.

Имитация позволяет нам нарушать физические законы реальности: мы можем поставить эксперимент на миллионе виртуальных городов, чтобы спасти один реальный.

Если экстраполяция, регрессия и даже сложные имитационные модели отвечают на вопрос «Что будет?» (прогнозируют будущее), то оптимизационные модели – это высшая точка управленческой математики, которая отвечает на вопрос «Как сделать лучше всего?». Это переход от пассивного наблюдения к активному конструированию реальности.

Классический пример – транспортная задача. У вас есть склады с товаром и магазины-получатели. Как перевезти груз, чтобы потратить минимум бензина? Составляется целевая функция (сумма затрат), задаются ограничения (вместимость складов, спрос магазинов), и задача решается методами линейного программирования.

В основе любой задачи оптимизации лежат три фундаментальных элемента:

1. Целевая функция. Это математическое выражение нашей цели. Мы должны перевести бизнес-задачу на язык формул. Целью может быть максимизация прибыли ($\text{Max } Z$), минимизация издержек ($\text{Min } C$) или сокращение времени производства. Например, если x – количество произведенного товара А, а y – товара Б, то целевая функция прибыли может выглядеть так: $Z = 500x + 300y \rightarrow \text{max}$.

2. Ограничения. Ресурсы всегда ограничены. У вас есть лимит сырья, количество рабочих часов, бюджет или вместимость грузовиков. Эти условия превращаются в систему неравенств:

$$2x + y \leq 100 \text{ (запас стали);}$$

$$x + 3y \leq 120 \text{ (часы работы станков);}$$

$$x, y \geq 0 \text{ (мы не можем произвести отрицательное количество товара).}$$

3. Переменные решения. Это те рычаги управления, которые мы крутим. В нашем примере это количества x и y . Задача алгоритма – найти такие их значения, при которых цель (Z) достигнет экстремума, ни разу не нарушив границы ограничений.

Вернёмся к транспортной задаче. Представьте логистику крупного ритейлера. У вас есть пять заводов-производителей с фиксированным запасом продукции и сто торговых центров, которым нужен этот товар. Доставка из каждого пункта А в пункт Б стоит разных денег (разное расстояние, разные тарифы перевозчиков). Вопрос: сколько единиц товара нужно отправить с каждого завода в каждый магазин, чтобы суммарно потратить минимум бензина и человеко-часов?

Математически – это гигантская таблица (матрица), где сумма по строкам равна запасам складов, сумма по столбцам – спросу магазинов, а мы ищем комбинацию потоков, дающую минимальный результат функции $\sum \sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$. Эта задача решается методами линейного программирования (например, алгоритмом симплекс-метода) за доли секунды, хотя человек решал бы её неделями.

Экономика здесь выступает как гигантский вычислительный механизм по поиску кратчайшего пути к цели. Сегодня эти методы управляют всем:

Авиакомпании оптимизируют расписание экипажей и самолетов.

Банки составляют кредитные портфели с максимальной доходностью при заданном уровне риска (это уже нелинейная оптимизация).

Инвестиционные фонды распределяют миллиарды между акциями для достижения целевой структуры портфеля.

Оптимизация говорит нам: «При ваших ресурсах выжимать больше невозможно – вы достигли технологического предела эффективности».

Написать качественную исследовательскую работу можно, следуя строгому алгоритму интеграции математики.

Критерии выбора метода. Выбор инструмента диктуется природой ваших данных и целью исследования.

Если ваша цель – доказать влияние одного фактора на другой (например, влияет ли количество часов сна на количество ошибок медсестры?), ваш выбор – корреляционно-регрессионный анализ. Главное условие – наличие количественных данных.

Если вы хотите классифицировать объекты (разделить клиентов на надежных и рискованных), используйте кластерный анализ или деревья классификации.

Если данных мало, но много экспертных мнений, применяйте метод анализа иерархий (АНР), выстраивая матрицы парных сравнений. Никогда не подгоняйте задачу под любимый метод. Сначала сформулируйте гипотезу, затем ищите микроскоп, который позволит её проверить.

Научный текст с математическим уклоном строится иначе, чем эссе. Структура должна быть жесткой:

Проблема: Почему текущих знаний недостаточно?

Гипотеза: Что именно мы проверяем?

Данные: Источники, период, очистка данных (выбросы).

Спецификация модели. Запись формулы, которую вы будете оценивать. Обязательно обоснование каждой переменной. Почему вы включили инфляцию, но забыли про безработицу?

Верификация. Проверка значимости коэффициентов, проверка остатков на гетероскедастичность¹² (не меняется ли риск со временем?). Без проверки качества модели ваши числа – просто мусор.

Перевод с математического языка на человеческий (интерпретация): не «коэффициент бета равен 0,5», а «увеличение фактора X на единицу приводит к росту результата Y на 0,5 единицы при прочих равных условиях».

Оформление результатов. Современный стандарт требует использования специализированного ПО. Текст пишется в редакторах, поддерживающих разметку формул (LaTeX или встроенные редакторы Word). Таблицы должны быть редактируемыми, графики – векторными. Выводы оформляются строго нумерованным списком. Каждый вывод должен прямо отвечать на задачи, поставленные во введении. Использование современных стандартов оформления библиографии (ГОСТ Р 7.0.100–2018 или международные стили APA/MLA) обязательно; для этого используются менеджеры вроде Zotero или Mendeley.

¹² Гетероскедастичность (от англ. heteroscedasticity) – это ситуация в регрессионной (эконометрической) модели, когда дисперсия случайной ошибки (остатков) непостоянна: она меняется в зависимости от значений независимых переменных или положения наблюдений в пространстве. Проще говоря, разброс точек данных вокруг линии регрессии не одинаков для всех значений объясняющей переменной – в одних случаях данные «рассеяны» меньше, в других – сильнее.

Математика мертва без вычислительных мощностей. Теоретические основы менеджмента сегодня неотделимы от IT. Чтобы реализовать любую из вышеописанных моделей, нужны инструменты формализованного представления предметной области. Мы используем UML-диаграммы и схемы «сущность-связь», чтобы превратить хаос реального бизнеса в четкую структуру таблиц.

Сердце любой компании – база данных (БД). Это структурированное хранилище оперативной информации (текущие заказы, остатки на складе). Но для аналитики базы данных слишком медленные и грязные. Поэтому создаются корпоративные хранилища данных. Это огромные резервуары, куда стекается очищенная информация из всех систем компании за десятилетия.

Наконец, вершина пирамиды – базы знаний и экспертные системы. В отличие от обычных баз данных, они хранят не факты, а правила вывода (логику): «ЕСЛИ стаж водителя больше 10 лет И аварий не было, ТО класс страхования повышается». Коммуникационные технологии связывают всё это в единую нейронную сеть предприятия, позволяя передавать потоки цифр между филиалами в реальном времени.

Математика – это язык, на котором написана книга Вселенной, а менеджмент – искусство чтения этой книги. Освоив эти инструменты сегодня, завтра вы сможете проектировать экономику будущего. Изучайте синтаксис формул, и они откроют вам логику любого процесса.

Лекция 6. Системы поддержки принятия решений для рационализации организационных структур и оптимизации управления экономикой на всех уровнях

Обоснование важности принятия эффективных решений в условиях рыночной конкуренции и глобальных изменений в экономике. Подробное рассмотрение классификации СППР с примерами реальных кейсов их применения.

Рассмотрение архитектуры СППР, включая подробное изучение каждого компонента системы.

Изучение основных методик и подходов к обработке данных, используемых в системах поддержки принятия решений. Демонстрация конкретных примеров применения СППР в промышленности, финансовом секторе, государственном регулировании и кадровом менеджменте.

Анализ перспектив дальнейшего развития СППР и технологических новшеств, влияющих на развитие современной науки и практики управления. Выводы по курсу.

Один из самых мощных инструментов в арсенале современного менеджера – система поддержки принятия решений, или СППР. Тема звучит академично: «Рационализация организационных структур и оптимизация управления экономикой». Но за этими словами скрывается простая истина: как руководителю перестать действовать наугад и начать управлять будущим с математической точностью.

Почему интуиции больше недостаточно? Представьте себе капитана огромного океанского лайнера. Сто лет назад он полагался на компас, звезды и свой опыт. Сегодня капитан управляет судном через интерфейс бортового компью-

тера, который учитывает скорость течения, плотность тумана, расход топлива и движение других судов. Современная экономика – это такой же супертанкер, попавший в идеальный шторм.

Во-первых, рыночная конкуренция достигла точки асимптоты¹³. Эпоха легких денег прошла. Маржинальность бизнеса падает, а стоимость привлечения клиента растет. Если вы ошибетесь с ценой товара или услуги всего на два процента или неверно рассчитаете объем закупки на складе, ваш конкурент, использующий алгоритмы, заберет вашу долю рынка мгновенно. Цена ошибки стала фатальной.

Во-вторых, глобальная турбулентность. Мы живем в эпоху разрывов цепочек поставок, санкционного давления, резких колебаний курсов валют и изменения потребительского поведения после пандемий. Линейное планирование («в прошлом году продали на 10 миллионов, значит, в этом продадим на 11») больше не работает. Внешняя среда меняется быстрее, чем успевает среагировать человеческая психика. Менеджер XXI века тонет в данных, получая информацию от отделов маркетинга, логистики, финансов и производства, которая поступает непрерывным потоком. Человеческий мозг физически не способен обработать эти массивы информации без потери качества.

Именно здесь возникает потребность в СППР. Важно понимать, что СППР – это не искусственный интеллект, который увольняет директора. Это экзоскелет для мозга руководителя. Система не принимает решение за вас, она готовит информационную базу, просчитывает риски и показывает последствия каждого вашего шага.

Чтобы эффективно использовать инструмент, нужно понимать его устройство. В теории менеджмента принято классифицировать СППР по нескольким ключевым признакам.

Классификация по взаимодействию с пользователем – пассивные СППР. Это системы-советники. Они моделируют ситуацию, но не вмешиваются в процесс генерации идей.

Пример. Моделирование инвестиционного портфеля, когда в систему вводятся различные параметры, к примеру сумма и уровень риска, система строит графики доходности разных активов за последние 20 лет и говорит: «Если бы ты вложил сюда пять лет назад, заработал бы столько-то», но кнопку «Купить» нажимаете вы сами.

¹³ Асимптота – это прямая, к которой график функции бесконечно приближается, но не пересекает её. Асимптоты помогают понять поведение функции на бесконечности или вблизи точек разрыва.

Активные СППР, когда системы глубоко интегрированы в бизнес-процесс. Они не просто советуют, а генерируют конкретные директивы или даже выполняют операции автоматически.

Пример. Динамическое ценообразование в авиакомпаниях или сервисах такси (Яндекс.Go, Ситимобил, Везёт). Алгоритм видит рост спроса около концертного зала, падение температуры на улице и количество свободных машин в радиусе километра. На основе этого он активно меняет коэффициент цены прямо на вашем экране.

Кооперативные СППР, видимо, самый распространенный тип в крупном бизнесе. Это диалог человека и машины, когда система предлагает варианты, менеджер корректирует их исходя из своих знаний о политике компании, система пересчитывает прогнозы с учетом правок.

Классификация по уровню управления (иерархическая структура) – разделение, критически важное для карьеры.

Оперативный уровень, работа с транзакциями здесь и сейчас.

Пример. Система автоматического распределения заказов курьерам службы доставки еды (Купер, Delivery Club, «Яндекс.Еда»). Задача сервиса доставки решается в реальном времени для тысяч точек с понятной целью – минимизировать время ожидания.

Тактический уровень. Управление отделами и проектами на горизонте месяца-года.

Пример: Оптимизационная модель склада крупного ритейлера (RWB, Озон, X5 Group). Система решает задачу линейного программирования – как распределить товары по полкам и грузовикам так, чтобы минимизировать логистические издержки при ограниченном объеме фур.

Стратегический уровень. Поддержка высшего руководства при долгосрочном планировании (3–10 лет).

Пример: Использование сценарных моделей для выхода корпорации на новые рынки. Перед советом директоров стоит выбор, где строить завод: в Казахстане или во Вьетнаме? СППР анализирует политические риски, стоимость электроэнергии, демографию и выдает матрицу рисков для каждого сценария.

Современный менеджмент без использования СППР превращается в гадание на кофейной гуще. Компании, чей контур управления замкнут только на интуи-

цию генерального директора, проигрывают тем, чье управление опирается на цифровые двойники процессов. О том, как именно математика превращает хаос данных в стройную стратегию, мы поговорим на примере конкретных алгоритмов оптимизации уже на следующей лекции.

Итак, мы определили, зачем нужны системы поддержки принятия решений. Сегодня мы заглянем «под капот» этой технологии и разберем архитектуру СППР. Любая подобная система – это не монолитная программа, а сложный конструктор из четырех базовых модулей. Понимание их взаимодействия критически важно для менеджера, чтобы грамотно ставить задачи IT-специалистам.

1. Подсистема управления данными (Data Management Subsystem) – фундамент всей конструкции, «водопровод» системы. Сюда стекается информация как из внутренних источников компании (ERP-системы типа 1С или SAP, базы данных бухгалтерии), так и извне (котировки валют, курсы акций, новости, данные Росстата). Компонент включает в себя хранилище данных и инструменты очистки информации. Если здесь ошибка – дубликаты товаров или неверные остатки на складе, то все последующие расчеты будут ложными. Принцип GIGO («Мусор на входе – мусор на выходе»)¹⁴ работает здесь безотказно.

2. Подсистема управления моделями (Model Management Subsystem) является аналитическим ядром, «мозгом» СППР. Здесь хранятся не сырые цифры, а математические алгоритмы, в том числе статистические модели прогнозирования спроса, оптимизационные модели распределения бюджета, сетевые графики проектов. Именно этот блок позволяет превратить исторические данные о продажах в прогноз выручки на следующий квартал. Менеджер здесь выступает как дирижер, выбирая нужную модель для конкретной бизнес-проблемы.

3. Пользовательский интерфейс (User Interface Subsystem), образно говоря, – мост между человеком и машиной. Качественный интерфейс визуализирует сложные зависимости через понятные дашборды, графики и тепловые карты. Для менеджера это может быть одна кнопка «Оценить риск проекта», за которой скрываются миллионы вычислений. Плохой интерфейс делает самую мощную систему бесполезной, превращая её в сложную таблицу Excel, в которую никто не хочет смотреть.

4. Интеграционная платформа / Диспетчер (The Dialogue Generation and Management Component), часто называемый «шиной данных». Это програм-

¹⁴ Принцип GIGO (от англ. *garbage in, garbage out*) – это фундаментальное правило в информатике, теории систем и обработке данных. Качество выходных данных напрямую зависит от качества входных. Если на вход системы подаются неверные, неполные, устаревшие или бессмысленные данные, то на выходе, независимо от сложности и корректности алгоритмов обработки, получится столь же некачественный, ошибочный или непригодный для использования результат.

мный слой, который синхронизирует работу первых трех блоков. Когда вы меняете параметр на графике интерфейса, диспетчер отправляет команду в базу данных достать новые числа, передает их в математическую модель и возвращает результат обратно вам на экран.

В совокупности эти компоненты образуют замкнутый цикл: данные питают модели → модели генерируют варианты → интерфейс представляет их вам → вы принимаете решение, которое меняет реальность и, следовательно, обновляет исходные данные.

Перейдём от архитектуры системы к её функциональному наполнению. Как именно СППР переваривает сырые цифры и превращает их в управленческий сигнал? Мы рассмотрим основные методики обработки данных, а затем закрепим теорию разбором реальных примеров из разных секторов экономики.

Методологический инструментарий: как «готовятся» данные. Прежде чем менеджер увидит рекомендацию на экране, данные проходят через несколько фильтров:

Описательная аналитика определяет, что произошло. Это базовый уровень: агрегация, расчет средних значений, поиск аномалий и визуализация. Сюда относятся OLAP-кубы¹⁵, которые позволяют менеджеру мгновенно «провалиться» от общей выручки компании до чека конкретного магазина за вчерашний день. Без этого слоя невозможен никакой дальнейший анализ.

Прогнозная аналитика определяет, что произойдет. Здесь вступают в дело статистические модели. Используются методы временных рядов (ARIMA, экспоненциальное сглаживание) для предсказания спроса или логистическая регрессия для оценки вероятности ухода клиента. Система находит закономерности в прошлом и экстраполирует их в будущее с определенной вероятностью.

Предписывающая аналитика определяет, что следует сделать. Это высшая лига принятия решений. Если прогноз говорит, что спрос на товар упадет, предписывающая модель скажет вам, на сколько именно снизить цену, чтобы склад опустел без убытков. Основные инструменты здесь – линейное программирование (оптимизация распределения ресурсов при ограничениях), имитационное моделирование (метод Монте-Карло для оценки рисков инвестиционных проектов) и деревья решений.

¹⁵ OLAP (On-Line Analytical Processing) – это технология аналитической обработки данных, которая позволяет быстро получать структурированные срезы из больших массивов информации для поддержки принятия управленческих решений. Её суть в многомерном анализе данных, что даёт возможность исследовать информацию с разных ракурсов и выявлять скрытые закономерности.

Рассмотрим, как эти методики работают в различных средах.

1. В металлургии или нефтедобыче используются системы предиктивного обслуживания оборудования. Датчики вибрации на станке передают поток данных в СППР. Модель машинного обучения распознает паттерн, который предшествовал поломке аналогичного узла год назад. В результате диспетчер получает уведомление о необходимости замены подшипника до того, как дорогостоящая производственная линия стоимостью в миллионы долларов выйдет из строя.
2. В банковском кредитовании невозможно без скоринговых систем. Когда вы подаете заявку на кредит, СППР за доли секунды прогоняет ваши анкетные данные через сотни переменных: историю платежей, активность в социальных сетях, макроэкономическую ситуацию в вашем регионе. В результате вычисляется интегральный показатель кредитного риска. Алгоритм решает, одобрить ли низкий лимит автоматически или отправить досье на проверку человеку-аналитику.
3. В управлении транспортными потоками мегаполиса камеры фиксируют плотность трафика. СППР строит граф дорожной сети города. Результат: в случае ДТП система динамически меняет время работы светофоров на прилегающих улицах и перенаправляет потоки навигационных приложений, минимизируя риск возникновения многокилометровой пробки.
4. Крупные корпорации используют СППР для удержания талантов. Алгоритм анализирует цифровое поведение сотрудников: частоту участия в проектах, результаты опросов вовлеченности, динамику премий. В результате система выявляет специалистов с высокой вероятностью увольнения («выгоревших») и подсказывает HR-менеджеру: данного сотрудника нужно повысить или отправить в отпуск, иначе через два месяца компания потеряет ключевого инженера.

Сфера здравоохранения – это одна из самых сложных и ответственных сред для применения систем поддержки принятия решений. Здесь цена ошибки измеряется не только финансовыми потерями, но и человеческими жизнями, а объем данных колоссален: от генома пациента до макроэкономических показателей государственного бюджета на медицину. Рассмотрим, как описанные ранее методики (описательная, прогнозная и предписывающая аналитика) работают в медицинском менеджменте.

1. Описательная аналитика. На этом уровне менеджмент медицинского учреждения использует СППР для оперативного контроля, так называемый «циф-

ровой профиль» клиники. Система собирает данные с медицинских информационных систем. Главный врач или заведующий отделением видит тепловую карту занятости коечного фонда.

Пример. В разгар сезона ОРВИ система показывает, что в терапевтическом отделении заполнено 95% мест, а в хирургическом – всего 40%. При этом анализ расхода медикаментов сигнализирует об аномально быстром расходе антибиотиков именно в терапии.

Управленческое решение: менеджер оперативно перераспределяет младший медицинский персонал из хирургии в терапию и делает экстренный заказ препаратов, предотвращая коллапс отделения еще до того, как поступят следующие пациенты.

2. Прогнозная аналитика. Алгоритмы анализируют историю болезни тысяч пациентов, их анализы крови, возраст и образ жизни, что называется предиктивная медицина, когда мы переходим от фиксации фактов к предсказанию событий с помощью модели машинного обучения и анализа временных рядов.

Пример. СППР оценивает риск послеоперационных осложнений. Если у пациента комбинация факторов (возраст + определенный маркер в анализе крови) совпадает с паттернами тех, кто имел осложнения в прошлом, система подает сигнал тревоги. Врач назначает дополнительную профилактику.

Ещё пример. Минздрав России или региональный используют модели ARIMA для прогнозирования сезонной нагрузки на поликлиники. Анализируя поисковые запросы граждан («болит горло») и текущие погодные данные, система предсказывает пик эпидемии гриппа в конкретном регионе за две недели до его начала. Соответственно, требуются своевременное развертывание дополнительных кабинетов вакцинации и закупка необходимых доз противовирусных препаратов.

3. Предписывающая аналитика. Это самый сложный уровень, где математика диктует оптимальную стратегию по оптимизации ресурсов. Здесь используется линейное программирование, теория графов и имитационное моделирование.

Пример. Использование алгоритмов теории графов для построения сети станций скорой помощи. Система решает задачу размещения – где построить новую подстанцию, чтобы время доезда до самого удаленного пациента в городе не превышало 20 минут при минимальных затратах на строительство?

Другой пример. Составление графика плановых операций. Это классическая задача оптимизации. У нас есть список хирургов, список свободных операци-

онных и список приоритетности пациентов. СППР составляет расписание так, чтобы дорогостоящий робот-хирург Da Vinci не простаивал ни минуты, а дорогие расходные материалы закупались ровно к нужному часу, не занимая место на складе.

Пример (Телемедицина): Сортировка обращений. Чат-боты на базе СППР обрабатывают простые симптомы, назначают время приема по оптимальным маршрутам внутри клиники (чтобы пациент не стоял в очередях в разные кабинеты), освобождая время врача-клинициста для действительно тяжелых случаев.

Ответственность. Если нейросеть отказала в выдаче кредита – это убыток. Если алгоритм ИИ ошибочно классифицировал тень на рентгеновском снимке как норму – это может стоить жизни. Поэтому в медицине СППР всегда остается инструментом поддержки, а финальную юридическую ответственность несет человек-врач. Кроме того, работа с персональными данными требует высочайшего уровня кибербезопасности и анонимизации при обучении моделей.

Сфера трансплантации органов – это экстремальный пример применения СППР, где время исчисляется часами, а дефицит ресурса (донорского органа) критичен. Здесь системы поддержки принятия решений работают на пределе вычислительных мощностей.

Менеджеры национальных баз данных (например, листа ожидания) используют дашборды для мониторинга в реальном времени. Система визуализирует географию пациентов с критической стадией отказа органов и текущие запасы консервирующих растворов в медицинских центрах. Это позволяет видеть «узкие места», где скопление пациентов превышает возможности локальных клиник. Этот процесс можно обозначить как описательная аналитика.

Когда появляется донорский орган, запускается прогностический модуль. Алгоритмы машинного обучения анализируют HLA-фенотипы донора и тысяч реципиентов за секунды, вычисляя индекс PRA – вероятность отторжения. Система исключает тех, чей организм гарантированно разрушит орган. Модель предсказывает вероятную продолжительность жизни пациента после операции («годы приобретенной жизни»). Приоритет отдается не тому, кто дольше стоит в очереди, а тому, у кого прогноз успеха максимален. Это пример прогнозной аналитики – оценки совместимости и рисков.

Также применяется предписывающая аналитика, оптимизация логистики. Это ядро системы. Задача формулируется как сложная комбинаторная оптимизация.

Получив известные переменные – геолокация операционной, наличие свободной бригады врачей, тип транспорта (борт Санавиации или спецавтомобиль), расчетное время доставки и «срок годности» органа вне тела (холодовая ишемия), – математическая модель строит дерево сценариев. Она сопоставляет десятки пар «орган-реципиент». Например: сердце из города А может подойти пациенту в городе Б или пациенту в городе В. СППР мгновенно выбирает вариант Б, так как риск потери органа при длительной транспортировке выше, несмотря на то что пациент в городе В может иметь чуть более высокий медицинский приоритет. Система автоматически блокирует бронь операционных в обоих городах на время полета, чтобы исключить простои дорогостоящих бригад.

Итог работы такой СППР – алгоритм выдает диспетчеру единственную оптимальную пару, минимизирующую расстояние и риск ишемии, превращая хаос экстренных звонков в точный логистический протокол спасения жизни.

Таким образом, СППР в здравоохранении превращает медицину из реактивной (лечение уже возникшей болезни) в проактивную (предотвращение болезни и оптимальное управление ресурсами ради спасения максимального количества людей).

Как видите, математика становится универсальным переводчиком между хаосом реальности и порядком эффективного управления.

Вопросы для самопроверки

1. Применение линейного программирования в управлении производственными процессами. Примеры из практики.
2. Эконометрические модели в прогнозировании спроса и управлении запасами. Примеры из практики.
3. Теория игр в стратегическом управлении и принятии решений. Примеры из практики.
4. Нелинейные модели в управлении финансовыми рисками. Примеры из практики.
5. Нейронные сети в прогнозировании экономических показателей и управлении инвестициями. Примеры из практики.
6. Применение методов кластерного анализа в сегментации рынка. Примеры из практики.
7. Использование методов факторного анализа в оценке эффективности управления. Примеры из практики.
8. Методы анализа временных рядов в прогнозировании экономических показателей. Примеры из практики.
9. Применение методов регрессионного анализа в оценке инвестиционных проектов. Примеры из практики.
10. Нейронные сети в управлении цепочками поставок. Примеры из практики.
11. Что такое экономико-математическое моделирование и каковы его основные этапы?
12. Какие методы используются в экономико-математическом моделировании?
13. Каковы основные типы производственных функций и их применение в экономике?

14. Что такое линейное программирование и как оно применяется в экономике?
15. Каковы основные методы оптимизации в экономике?
16. Что такое теория игр и как она применяется в стратегическом управлении?
17. Какие методы используются для анализа временных рядов в экономике?
18. Каковы основные методы регрессионного анализа и их применение в экономике?
19. Что такое нелинейные модели и как они применяются в экономике?
20. Какие методы используются для анализа чувствительности решений в экономике?
21. Каковы основные методы кластерного анализа и их применение в экономике?
22. Что такое факторный анализ и как он применяется в экономике?
23. Какие методы используются для анализа данных в экономике?
24. Каковы основные методы анализа временных рядов и их применение в экономике?
25. Что такое нейронные сети и как они применяются в экономике?
26. Какие методы используются для прогнозирования экономических показателей?
27. Каковы основные методы анализа финансовых временных рядов?
28. Что такое модель Солоу и как она применяется в экономике?
29. Какие методы используются для анализа цепочек поставок в экономике?
30. Каковы основные методы анализа чувствительности решений в управлении цепочками поставок?

Список рекомендованной для самостоятельного изучения литературы

1. Автономов В. С. Судьба «больших теорий» в экономической науке. Вопросы теоретической экономики, 22(1), 96–105. https://doi.org/10.52342/2587-7666VTE_2024_1_96_105.
2. Акимова С. А. Проектный метод в экономико-математическом моделировании как способ формирования ключевых компетенций экономиста / С. А. Акимова, А. В. Мендель, О. Б. Мизякина // Информационные технологии в образовании. – 2020. – № 3. – С. 10–12.
3. Аксенова Е. И. Лучшие мировые практики оценки технологий здравоохранения: экспертный обзор / Е. И. Аксенова, А. А. Николаев. – Москва: Научно-исследовательский институт организации здравоохранения и медицинского менеджмента, 2025. – 56 с. – ISBN 978-5-907952-29-4.
4. Ансофф И. Стратегический менеджмент: классическое издание / И. Ансофф; [пер. с англ. О. Литун]. – Москва [и др.]: Питер, 2009. ISBN 978-5-388-00077-4, – С.179.
5. Артемьев В. С., Трамова А. М., Созаева Т. Х. (2025). Формализация нелинейного многоуровневого синергетического взаимодействия макроэкономических агентов. Региональные проблемы преобразования экономики, 178(8), 17–28. <https://doi.org/10.26726/rppe2025v8fonms>.
6. Байгушева И. А. Формирование математической компетентности экономистов в вузе. Современные проблемы науки и образования (1), 135. <https://doi.org/10.17513/spno.5543>.
7. Бермус А. Г. Трансформация высшего образования в России с позиций мир-системного анализа: современные тенденции. Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование, 23(1), 102–120. <https://doi.org/10.55959/LPEJ-25-05>.

8. Богнюков А. А., Зорькин Д. Ю., Тарасова И. А. Применение инструментов проектного планирования: диаграмма Ганта и сетевой график. Известия ЮФУ. Технические науки, (4), 102–110. <https://doi.org/10.18522/2311-3103-2025-4-102-110>.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / Физ.-мат. б-ка инженера. – Москва: Наука, 1966. – 307 с.
10. Борисова Л. Р., Кремер Н. Ш., Постовалова Г. А., Фридман М. Н. (2025). Сравнительный анализ индексов развития регионов Российской Федерации за 2024 г. по сравнению с 2023 г. методами математической статистики (кластерным и факторным анализами). Бизнес. Образование. Право, 3 (72), 101–107. <https://doi.org/10.25683/VOLBI.2025.72.1388>.
11. Бородин А. В. Корпоративное управление в акционерных обществах с государственным участием: методические рекомендации по преподаванию и изучению учебной дисциплины. Москва: Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ. ISBN 978-5-85006-704-5.
12. Бородин А. В. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2025620609 Российская Федерация. База данных – презентация «Трансформация концептуальных подходов к управлению»: заявл. 01.02.2025; опублик. 05.02.2025 / А. В. Бородин.
13. Бородин А. В. Применение искусственного интеллекта в менеджменте: цифровые угрозы / А. В. Бородин // Современные проблемы науки: сборник научных трудов аспирантов по итогам ежегодной научно-практической конференции, Москва, 14 марта 2026 года. – Москва: Научно-исследовательский институт организации здравоохранения и медицинского менеджмента, 2026. – С. 3–10.
14. Борох О. Н. Участие преподавателей МГУ в становлении системы экономического образования в КНР. Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика, 60 (4), 127–147. <https://doi.org/10.55959/MSU0130-0105-6-60-4-7>.
15. Васяйчева В. А. Применение методов математического моделирования для решения проблем в управлении промышленными предприятиями / В. А. Васяйчева // Вестник молодых ученых и специалистов Самарского государственного университета. – 2016. – № 1(8). – С. 102–107.

16. Виханский О. С. Менеджмент: жизненный цикл. Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика, 60 (1), 82–106. <https://doi.org/10.55959/MSU0130-0105-6-60-1-5>.
17. Воронов В. С., Волков А. Т., Чернявский С.В. Экономика интеллектуальной собственности платформенных и сетевых экосистем: монография. – М: ЦЭМИ РАН, 2025. – 111 с.
18. Воронов М. В., Герасименко П. В. О необходимости изменений в структуре высшего образования. Наука и образование: стратегии развития: Сборник статей по итогам Восьмого Профессорского форума 18–20 ноября 2025 г. Том 3. Российское профессорское собрание, 244–253.
19. Демченко А. Г. Прикладные аспекты высшей математики в менеджменте / А. Г. Демченко // Информационные технологии в образовании: Сборник статей научно-практической конференции / РГГМУ, Институт информационных систем и геотехнологий. – Санкт-Петербург, 2021. – С. 132–138.
20. Донев Д. Д., Темирчев К. Д. (2025). Экономические задачи, решаемые методом динамического программирования. Университетская наука, 20 (2), 114–117.
21. Доугерти К. Введение в эконометрику: Учеб. для студентов экон. специальностей вузов / Кристофер Доугерти; Пер. с англ. [Е. Н. Лукаш и др.]. – Москва: ИНФРА-М, 2001. – 401 с. ISBN 5-86225-458-7.
22. Елисеева И. И., Курышева С. В., Нерадовская Ю. В. и др. Эконометрика: учебник для вузов (Высшее образование). Москва: ООО «Издательство ЮРАЙТ», 450.
23. Ефремова Н. Е. Применение экономико-математических методов в выпускных квалификационных работах бакалавров менеджмента / Н.Е.Ефремова//Вестник Тульского филиала Финуниверситета.–2016.–№1.–С. 248–251.
24. Иванов В. В. Основные направления государственной политики обеспечения технологического суверенитета // Экономика науки. 2024. № 10(1). С. 10–20. <https://doi.org/10.22394/2410-132X-2024-10-1-10-20>.
25. Канторович Л. В. Математико-экономические работы / Л. В. Канторович; [отв. ред. С. С. Кутателадзе, И. В. Романовский] ; Российская акад. наук, Сибирское отделение, Ин-т математики им. С. Л. Соболева. – Новосибирск: Наука, 2011. – 756 с. ISBN 978-5-02-019076-4. – С. 43.

26. Клейнер Г. Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Клейнер Г. Б. Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 856 с. – С. 615.
27. Кобытова М. А., Шунайлова С. А. Развитие критического мышления у студентов с применением искусственного интеллекта. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Психолого-педагогические науки, 22 (4), 53–64. <https://doi.org/10.17673/vsgtu-pps.2025.4.4>.
28. Математический анализ устойчивости рыночного равновесия / Е. А. Джалмухамбетова, А. Р. Гайсина, А. А. Тошпулатов, А. Р. Безпалько // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2026. – Т. 3, № 1(166). – С. 46–56. – DOI 10.36871/ek.up.p.r.2026.01.03.003.
29. Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Логинов Е. Л. Применение экономико-математических методов и моделей оптимального планирования в цифровой экономике будущего (ЦЭМИ АН СССР и ЦЭМИ РАН: прогностическая интерпретация и развитие научного наследия нобелевских лауреатов Л. В. Канторовича и В. В. Леонтьева). – М.: ЦЭМИ РАН, 2022. – 248 с.
30. Македошина Н. А. Реализация компетентностного подхода в практиках подготовки специалистов нового поколения. Телескоп: журнал социологических и маркетинговых исследований, 1, 75–80. <https://doi.org/10.24412/1994-3776-2022-1-75-80>.
31. Набатова Д. С. Методы нелинейного программирования в задачах портфельного анализа. Современная математика и концепции инновационного математического образования, 10 (1), 356–362. https://doi.org/10.54965/24129895_2023_10_1_356.
32. Официальный сайт Минобрнауки России. Валерий Фальков выступил с докладом об основных изменениях в системе высшего образования в Совете Федерации URL:<https://minobrnauki.gov.ru/press-center/news/novosti-ministerstva/84010/> (дата обращения: 29.07.2026).
33. Петрова Г. Д. Количественное исследование рынка медицинского туризма в Таиланде / Г. Д. Петрова, Х. Кальва, Е. В. Чернышев, Д. Л. Смитгал // Здоровье мегаполиса. – 2024. – Т. 5, № 1. – С. 41–53. – DOI 10.47619/2713-2617.zm.2024.v.5i1;41-53.
34. Петрова Г. Д., Эминова В. С. Современные подходы к статистическому учету и анализу результатов научно-исследовательской деятельности / В. С. Эминова, Г. Д. Петрова, // Статистика здравоохранения: от данных

к действиям: Материалы VI Съезда медицинских статистиков города Москвы: сборник тезисов, Москва, 16–18 октября 2024 года. – Москва: Научно-исследовательский институт организации здравоохранения и медицинского менеджмента, 2024. – С. 57–61.

35. Славин В. А. Особенности статистического метода в неоинституциональной теории. Журнал экономической теории, 18 (2), 212–225. <https://doi.org/10.31063/2073-6517/2021.18-2.4>.
36. Сухарев О. С. Развитие высшего образования в России: парадигма фундаментальности. Экономика. Налоги. Право, 17 (4), 6–16. <https://doi.org/10.26794/1999-849X-2024-17-4-6-16>.
37. Файоль А. Общее и промышленное управление (репринтное издание) М.: ARCHIVE PUBLICA. 2024. 128 с.
38. Шунайлова С. А. Ориентиры повышения качества математической подготовки студентов. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Образование, здравоохранение, физическая культура, 7–2, 69–70.
39. Шунайлова С. А. Модель формирования экономико-математической компетенции будущих менеджеров. Высшее образование сегодня. – 7, 26–28.
40. Шунайлова С. А. Формирование экономико-математической компетенции будущих менеджеров в вузе: специальность 13.00.08 «Теория и методика профессионального образования»: диссертация на соискание учёной степени кандидата педагогических наук (С. А. Шунайлова). Челябинск.
41. Яковенко И. В. Математическая модель согласования интересов бюджетов при управлении межбюджетным регулированием / И. В. Яковенко // Государственное и муниципальное управление. Ученые записки СКАГС. – 2017. – № 1. – С. 62–68.
42. Anukiruthika T. & Jayas D. S. Mathematical modeling for management of stored-grain ecosystems: Approaches, opportunities, and research needs. Journal of Stored Products Research, 106, 102304. <https://doi.org/10.1016/j.jspr.2024.102304>.
43. Campbell L. Z., Pitt M., McLennan P. Robust statistical methods for point-of-sale designs, the example of healthcare snack and drink vending. Facilities, 39 (5-6), 277–285. <https://doi.org/10.1108/F-02-2019-0019>.

44. Challenges for Modern Higher Education in the Context of Social, Digital, Technological, and Sustainable Trends. – P. 130–142. – DOI 10.24412/2079-0910-2021-2-130-142.
45. David F.R. Strategic Management: Concepts and Cases 13th edition. – Prentice Hall, 2011. – 694 p -C.99.
46. Doroshin I. & Kazaryan R. Organizational and technological solutions for managing the processes of building transport systems using economic and mathematical methods. *Transportation Research Procedia*, 63, 530–540. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.06.045>.
47. Edalatpour M. A., Mirzapour Al-e-Hashem & Ghasemi S. Harmonizing project management and supply chain for sustainable construction: A comprehensive mathematical model and case study. *Sustainable Futures*, 10, 100805. <https://doi.org/10.1016/j.sftr.2025.100805>.
48. Horton A. Causal Economics: A new pluralist framework for behavioral economics that advances theoretical and applied foundations. *Heliyon*, 5 (4). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01342>.
49. Jaber M. Y., Peltokorpi J. Economic order/production quantity (EOQ/EPQ) models with product recovery: A review of mathematical modeling (1967–2022). *Applied Mathematical Modeling*, 129, 655–672. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.02.022>.
50. Lucas C., Paulo J. The usefulness of mathematical modelling for economic and environmental sustainability in the scope of university teacher education. *International Journal of Innovation Science*, 16 (2). <https://doi.org/10.1108/IJIS-08-2022-0152>.
51. Maghsoudi S., Duffield C., Wilson D. A practical tool for evaluation of innovation outcomes in building projects. *International Journal of Innovation Science*, 8 (4), 350–387. <https://doi.org/10.1108/IJIS-07-2016-0019>.
52. Okumura R., & Deguchi H. Indicating human capital including non-economic value. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 18, 45–62. <https://doi.org/10.1007/s40844-020-00166-1>.
53. Skivko M. O. Challenges for Modern Higher Education in the Context of Social, Digital, Technological, and Sustainable Trends. *Sociology of Science and Technology*. Vol. 12, No. 2. 130–142. <https://doi.org/10.24412/2079-0910-2021-2-130-142>.

54. Zhang Q., Fang H., Tang X. Modeling mathematical well-being among undergraduates: An exploratory study in Mainland China. *International Journal of Educational Research Open*. V. 9, December 2025, <https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2025.100507>.

Ресурсы

Интернет-ресурсы

1. Официальный сайт Президента Российской Федерации
<https://www.kremlin.ru/acts/constitution>
2. Официальный сайт Правительства Российской Федерации
<http://government.ru/>
3. Официальный сайт Минздрава России: <https://minzdrav.gov.ru/>
4. Официальный сайт Минобрнауки России: <https://minobrnauki.gov.ru/>
5. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека: <https://rospotrebnadzor.ru/documents/documents.php>
6. Научная электронная библиотека: <https://cyberleninka.ru/>
7. Научная электронная библиотека: <https://www.elibrary.ru/defaultx.asp>
8. Официальный интернет-портал правовой информации:
<http://pravo.gov.ru/ips/>
9. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации: <http://docs.cntd.ru/>
10. Сайт ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ»: <http://niioz.ru/>
11. Сайт по философии объективизма: <http://www.объективизм.рф>
12. ФГБУ «Центральный экономико-математический институт РАН»
<http://www.cemi.rssi.ru/>

13. Журнал «Прикладная эконометрика»
<http://appliedeconometrics.cemi.rssi.ru/>
14. Журнал «Вопросы государственного
и муниципального управления» <https://vgmu.hse.ru/>
15. Журнал «Экономика и математические методы»
<https://emm.jes.su/>

Зарубежные ресурсы

1. Реферативная база научных публикаций Web of Science
<http://www.webofscience.com>
2. База Scopus <https://www.scopus.com/home.uri>
3. Всемирная полнотекстовая база PhD диссертаций Proquest
<https://www.proquest.com/>
4. Международная база данных научных периодических
изданий Jstore <https://www.jstor.org/>

Научное электронное издание

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ
МЕТОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
КУРС ЛЕКЦИЙ**

Бородин Александр Владимирович

*Корректор: И. Д. Баринская
Дизайнер-верстальщик: А. И. Кораблева*

Объем данных: 904 КБ
Дата подписания к использованию: 21.09.2026
URL: <https://niiroz.ru/moskovskaya-meditsina/izdaniya-nii/metodicheskie-posobiya/>

ГБУ «НИИОЗММ ДЗМ»,
115088, г. Москва, ул. Шарикоподшипниковская, д. 9, пом. 5Ц
Тел.: +7 (495) 530-12-89
Электронная почта: niiozmm@zdrav.mos.ru



НИИ
ОРГАНИЗАЦИИ
ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
И МЕДИЦИНСКОГО
МЕНЕДЖМЕНТА

МОСКВА
2 0 2 6